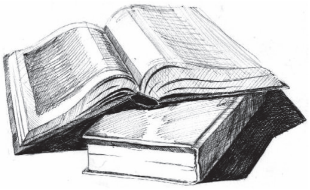

Замечания по математической исследовательской работе школьников

Белов Юрий Анатольевич, *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической информатики ЯрГУ им.П.Г.Демидова, преподаватель семинара по математике Городской программы «Открытие»*

Руководитель факультатива, семинара или кружка по математике в своей работе со школьниками-старшеклассниками обязан сочетать несколько совершенно разнородных направлений. Например, наряду с классической олимпиадной тематикой необходимо уделять определённое внимание другим вопросам, даже решению избранных задач из ЕГЭ (у школьников есть родители, и подход у них сугубо утилитарный).

В данной заметке мы коснёмся некоторых вопросов, связанных с исследовательской работой школьников. Конечно, сразу же может возникнуть вопрос – что такое исследовательская работа школьников, можно ли её считать научно-исследовательской и так далее. Полные ответы на эти вопросы слишком громоздки и весьма дискуссионны, не будем углубляться в этом направлении, давать свои определения и прочее. Просто отметим, что уже достаточно долго ежегодно проводится Российская научная конференция школьников «Открытие», которая может служить некоторым примером (пусть и не эталоном) такой работы. Вообще, вероятно, необходимо признать, что исследовательская работа со способными и просто со «средними» школьниками нужна и полезна. Некоторые замечания по обоснованию этого.

Действительно, олимпиадная тематика (традиционная форма работы со школьниками) слишком узка и недостаточно эффективна в плане роста понимания математики у школьников, хотя бы потому, что часто олимпиадная задача специально придумывается так, чтобы для её решения «ничего не надо знать», а требовалось бы только «чистое соображение». Это имеет смысл для первичного отбора способных ребят, но в старших классах требуются уже учёт и развитие других качеств.

Можно отметить, что иногда участники олимпиад (!) демонстрируют элементарную безграмотность даже в рамках школьного курса математики, особенно в геометрии. Это показывает, что у них убогое представление о математике как о наборе бессмысленных головоломок, то есть они, грубо говоря, являются в математике примитивами, никогда не думавшими над общими математическими вопросами. Другими словами, в олимпиадном направлении слишком большое отрицательное влияние имеют спортивные факторы. При этом могут теряться способные ребята-«тугодумы», которые изучают математические вопросы медленно, но глубоко. Кроме того, математические задачи или проблемы бывают различной величины, большинство их вообще не соответствует формату олимпиадной обстановки.

Таким образом, при работе со старшеклассниками на кружках для их развития необходимо также обсуждать вопросы совсем другого, не олимпиадного, вида, и решение их должно происходить не «на скорость», а на понимание и глубину. Работа, предполагаемая конференцией «Открытие», предоставляет именно такую возможность.

Частное замечание. Автор, в течение многих лет имел некоторое отношение к олимпиадам по математике и информатике, а работы на конференцию «Открытие» оценивал скептически. Однако теперь считаю, что данное направление необходимо поддерживать и всемерно развивать, именно как возможность исследовательской работы в математике или информатике (по которой требуется отдельная большая дискуссия) для школьников.

Конечно, при этом возникает большое количество трудностей, начиная с выбора темы исследования. Вопрос о выборе темы, естественно, один из самых обсуждаемых. Здесь автор близок к мнению, высказанному А.В.Ястребовым[1]: источником научной проблемы, которую рассматривает школьник, должен быть либо материал школьной программы, либо дополнительный материал той же сложности, что и школьная программа. На мой взгляд, необходимо только подчеркнуть ещё раз данный тезис требованием того, чтобы в работе рассматривались вопросы, ответы на которые действительно неизвестны.

Можно отметить, что никакого противоречия типа «школьный учебник и новизна» здесь нет. В математике и информатике такие темы указать нетрудно. Например, задача о возможности разбиения квадрата на конечное число попарно неравных квадратов совершенно школьная по постановке, однако она была нерешённой проблемой в течение многих десятилетий.

Конечно, затрагивая такой вопрос, можно рассмотреть и близкие проблемы разбиения данной фигуры на неравные подобные фигуры для других случаев. Например, задачи о разбие-

[1] Ястребов А.В. Школьный учебник как источник исследовательских задач // Учебный год. Информационно-методический журнал (Ярославль). 2007. № 1. С. 72-78.

нии правильного треугольника на правильные или прямоугольного равнобедренного треугольника на подобные (олимпиадные задачи), и, таким образом, из конкретного вопроса вырастает тема, достаточно большая по объёму. При этом внутри получившейся темы различные вопросы могут иметь различную сложность от простых задач до нерешённых проблем, как в приведённом примере.

С другой стороны, например, на конференцию была представлена тема о решении геометрических задач алгебраическим методом. При этом, были рассмотрены формулы расстояния от прямой до точки на плоскости и в пространстве, расстояния между прямыми и подобные известные формулы аналитической геометрии и были даны примеры их использования для решения задач. Данная работа была отмечена как хорошая. На мой взгляд, это неправильно, так как здесь нет исследовательской работы по математике, а есть только, в лучшем случае, исследовательская работа по методике преподавания геометрии в школе или просто изучены некоторых темы аналитической геометрии.

Привести другие примеры хороших, на взгляд автора, тем в краткой заметке затруднительно, но пропагандировать их необходимо и потому некоторые направления можно как-то обозначить. Например, в теории чисел имеется вполне признанное в научной среде разделение решений проблем на элементарные (грубо говоря, не использующие теорию аналитических функций) и неэлементарные.

Скажем, вопрос о представлении натуральных чисел суммой нескольких квадратов – задача, принципиально полностью решённая, однако получение конструктивных элементарных алгоритмов и процедур, перечисляющих все решения в различных случаях – совсем непростая, объёмная работа, содержащая множество трудностей. Напомним, что для двух квадратов вопрос решается теоремой Эйлера о решениях уравнения $x^2+y^2=k$. При этом количество решений с точностью до перестановок определяется однозначно.

Для трёх квадратов количество возможных решений описывается теоремой Лежандра и уже может быть велико. Поэтому возникает вопрос их оптимального перечисления. Для четырёх квадратов также имеется теорема Лежандра о том, что любое натуральное число представимо в виде суммы четырёх квадратов. Известны процедуры, указывающие количество различных решений для данного числа k, но они далеко не элементарны.

С другой стороны, ясно, что количество возможных представлений всегда конечно, например, $1^2+2^2+3^2+4^2=0^2+1^2+2^2+5^2=30$ и тому подобное и имеется, таким образом, вопрос их оптимальной генерации. Решать его можно программно, предлагать различные перечислительные процедуры и представлять сравнительные результаты.

И подобных тем в теории чисел очень много. Например, имеется древний циклический метод решения диофантовых уравнений $x^2–ay^2=b$. Обосновать его в общем виде элементарными способами вряд ли возможно, однако иллюстрировать на различных числовых примерах весьма поучительно, при этом для конкретных значений параметров a и b он допускает точное доказательство сходимости, которое также было бы весьма интересно. В связи с этим можно упомянуть книгу Г. Эдвардса[1], в которой многие теоретико-числовые вопросы рассматриваются, начиная с элементарной точки зрения, «генетически».

Аналогичные соображения при выборе темы можно использовать в алгебре. Вопросы делимости в различных кольцах многочленов похожи на теорию делимости целых чисел и предоставляют неограниченное количество тем, связанных с алгебраическими числами, неприводимыми многочленами, алгоритмами разложения и так далее.

Другими словами, по мнению автора, благодатным и вполне достойным направлением исследовательской работы школьников является решение «неэлементарных задач элементарными методами». Множество тем может быть взято из различных олимпиадных задач. Чего стоят хотя бы задачи на клетчатой бумаге, для многих из которых просто неизвестны хорошие решения.

Например, на клетчатой бумаге закрашено некоторое конечное множество клеток. Требуется указать алгоритм, вычисляющий минимальное количество прямоугольников, на которое может быть разбито данное множество клеток. Конечно, предполагается, что переборный алгоритм неудовлетворителен. Конечно, можно различными способами ограничивать классы закрашиваемых областей – можно рассматривать только односвязные фигуры, или только «выпуклые» (аналог обычной выпуклости можно определить), или какие-то другие и для них получать некоторые результаты.

Отметим, что в данной работе требуется построить алгоритм, в связи с чем может возникнуть вопрос – к какой области относится данная работа – к математике или к информатике. Это один из вопросов той возможной дискуссии, которая упоминалась ранее. Всё же, видимо, получение оптимального алгоритма или оптимального решения – это вопрос прикладной математики. В данном случае многие задачи по информатике содержат в себе математические задачи. Множество похожих задач собраны в сборнике «Ярославские олимпиады по информатике»[2]. Какие-то из них являются в большей степени математическими, чем задачами по информатике. Во всяком случае, оптимальные, или просто приемлемые решения, известны авторам далеко не всегда. Это не слишком удивительно, так как школьникам предлагалось в некоторых случаях найти хотя бы какие-то решения. Отметим, что в приведённом сборнике многие задачи «пришли» из олимпиад по математике, хотя и адаптированы к информатике.

---

[1] Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. М.: Мир, 1980.

[2] Волчёнков С.Г., Корнилов П.А., Белов Ю.А., Дашниц Н.Л., Никулин В.А., Заводчикова Н.И. Ярославские олимпиады по информатике. Сборник задач с решениями. М.: Бином, 2010.

Конечно, следует отметить, что выбор удачного направления исследовательской работы для руководителя является нетривиальной задачей. Здесь руководитель должен учесть множество разнородных факторов – возможности ученика, предусмотреть различные варианты окончания работы, привлекательность данной темы для других школьников и учителей и так далее.

По мнению автора, наиболее оптимально наличие двух руководителей для каждой работы – учителя математики данного школьника и, скажем, преподавателя вуза-руководителя кружка, который посещает школьник. При этом учитель лучше знает ученика, его склонности, постоянно находится с ним в контакте, что активизирует текущую работу по теме. Руководитель кружка предлагает тему, очерчивает приблизительные границы достижимости и возможные методы. В случаях теоретических затруднений либо совместно принимается решение об «отступлении на заранее подготовленные позиции», либо усилия по решению продолжаются, либо ученику даётся явная подсказка (если она имеется у руководителей). Видимо, работа такого мини-коллектива является полезной для всех его участников. Школьных учителей за эту работу надо поощрять – учитывать её при переаттестации, деньгами, и/или как-то ещё – здесь требуются адекватные административные решения (правда, с ними у нас устойчивые трудности).

Несколько слов об оценке проведённой работы. Основное возражение – «какой смысл в том, что ученик что-то переписал под диктовку руководителя»? Но это замечание можно адресовать всему учебному процессу – «школьники что-то заучивают, но ничего не понимают». Здесь всё зависит от руководителей – какова их цель – получить текст или понимание учеником новых методов и идей. А что касается олимпиадных или других конкурентных «голов, очков, секунд», то, во-первых – даже в спорте есть другая цель – кроме очков – совершенствование человека, а во-вторых – математика вовсе не спорт, а уж скорее игра, «игра с бесконечностью», как сказала одна великая женщина. То есть соревнуешься не с другими участниками, как в спорте, а с природой, а в случае математики даже не с природой, а непонятно, с чем.

Кстати, выявить понимание или непонимание школьником своей темы на конференции в процессе живого общения и дать адекватную оценку работы, на взгляд автора, вполне возможно, и такое выявление бывает весьма полезным для всех участников конференции. Кстати, надо поощрять выступления всякого присутствующего при обсуждении работ на конференции, а не только членов жюри или участников. Обсуждение работ, на взгляд автора, должно быть максимально открытым и демократичным. Это сильный воспитательный инструмент для всех участников конференции.

Но, повторю в явном виде: основная цель исследовательской работы – не выступление на конференции, эта работа, как и любая другая **научная работа, – самоценна**.