Школьный учебник как источник исследовательских задач

Ястребов А.В.,
доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой методики преподавания математики ЯГПУ им.К.Д.Ушинского,
эксперт секции «Математика» Российской конференции «Открытие»

1. О постановке исследовательской задачи для школьника

Научный руководитель школьника сталкивается с целым рядом трудностей уже на этапе формулировки задачи. С одной стороны, содержательная математическая задача, которая могла бы считаться научной работой школьника, зачастую труднодоступна или даже недоступна для него, поскольку требует серьезной предварительной подготовки. С другой стороны, доступная для школьника проблема, пусть очень трудная для него лично, часто не может рассматриваться как научная работа, даже если сделать поправку на возраст учащегося. По мнению автора, одним из методов разрешения данного противоречия может служить выполнение следующего принципа: *научная математическая проблема, решаемая школьником, должна иметь своим источником либо материал школьной программы, либо дополнительный материал той же сложности, что и школьная программа.*

Ниже мы приведем три задачи из области геометрии, иллюстрирующие плодотворность данного принципа. Все они были предложены старшеклассникам в качестве темы исследования и апробированы на научной конференции школьников «Открытие», причем две работы были награждены дипломами.

2. Треугольник, вписанный в треугольник

В течение многих лет в школьных учебниках присутствует следующее упражнение.

Упражнение 1. Пусть точки *M, N, K* являются серединами сторон треугольника *PQR.* Докажите, что площадь треугольника *MNK* равна четверти площади треугольника *PQR.*

В дополнительной литературе (например, в одной из книг В.В.Прасолова) имеется более сложное упражнение, идейно связанное с данным.

Упражнение 2. Пусть точки *M, N, K* делят стороны треугольника *PQR* в отношении 2:1, т.е. $\frac{PM}{MQ}=\frac{QN}{NR}=\frac{RK}{KP}=2$. Докажите, что площадь треугольника *MNK* равна одной трети площади треугольника *PQR.*

По поводу этой задачи один из *восьмиклассников* (Алексей Катусов, школа № 33 г. Ярославля) задал автору два вопроса: 1) почему стороны треугольника делятся в отношении именно 2:1, а не в каком-либо другом отношении? 2) почему все три стороны делятся в одном и том же отношении, а не каждая сторона по-своему? По-видимому, эти вопросы были достаточно серьезны для школьника, поскольку были заданы с некоторым раздражением, вызванным «неестественностью» задачи и неясностью ее происхождения. В этих условиях автор переформулировал ситуацию на векторном языке и поставил перед школьником следующую проблему.

Проблема. Дан треугольник *PQR*. На его сторонах выбраны точки *M, N, K* таким образом, что $\overline{PM} = \alpha\overline{PQ}$, $\overline{QN} = \beta\overline{QR}$, $\overline{RK} = \gamma\overline{RP}$. Найдите взаимосвязь между площадями треугольников *MNK* и *PQR*.

Стоит отметить, что автору пришлось опередить школьную программу и познакомить своего ученика с векторами. Важно, что ученик с удовольствием пошел на это для того, чтобы решить заинтересовавшую его проблему.

Очевидно, что площадь треугольника *MNK* зависит как от площади треугольника *PQR*, так и от параметров деления сторон, т.е. $S_{\Delta MNK} = f(S_{\Delta PQR}, \alpha, \beta, \gamma)$. Фактически от ученика требовалось найти аналитическое выражение для функции *f*.

В результате решения была получена следующая формула:

$$S_{\Delta MNK} = S_{\Delta PQR}[1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]. \qquad (1)$$

Вскоре стало очевидным, что эта формула может применяться для решения целого ряда задач, которые, на первый взгляд, никак не связаны между собой. Приведем наиболее интересную их них, связанную с теоремой Менелая.

Задача. Докажите теорему Менелая с помощью формулы (1).

Решение. Рассмотрим ситуацию, когда точки *M, N, K* лежат на одной прямой, т.е. такую, что $S_{\Delta MNK} = 0$. В этом случае выражение в квадратных скобках в формуле (1) равно нулю, откуда можно вывести, что $\gamma[1-(\alpha+\beta)] = [1-(\alpha+\beta)] + \alpha\beta$. В полученной формуле выражение в квадратных скобках не равно нулю, поскольку в противном случае $MN \parallel PR$ и точка *K* не существует. Отсюда мы получаем, что

$$\gamma = 1 + \frac{\alpha\beta}{1-(\alpha+\beta)}. \qquad (2)$$

Вычислим теперь произведение трех отношений, фигурирующее в теореме Менелая. Учитывая взаимное расположение точек, мы видим, что $\frac{PM}{MQ}\cdot\frac{QN}{NR}\cdot\frac{RK}{KP} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{\gamma}{\gamma-1}$. Подставляя в это выражение значение γ из формулы (2), мы получим требуемое соотношение $\frac{PM}{MQ}\cdot\frac{QN}{NR}\cdot\frac{RK}{KP} = 1$.

Таким образом, школьник выполнил серьезные умственные действия, типичные для профессионального математика: сформулировал проблему, решил ее и вывел важное следствие из полученного им результата.

3. Расстояние от точки до геометрической фигуры

В течение многих лет в школьных учебниках присутствуют две теоремы.

Теорема 1. Множество точек, равноудаленных от концов отрезка, является серединным перпендикуляром к нему.

Теорема 2. Множество точек, равноудаленных от сторон угла, является его биссектрисой.

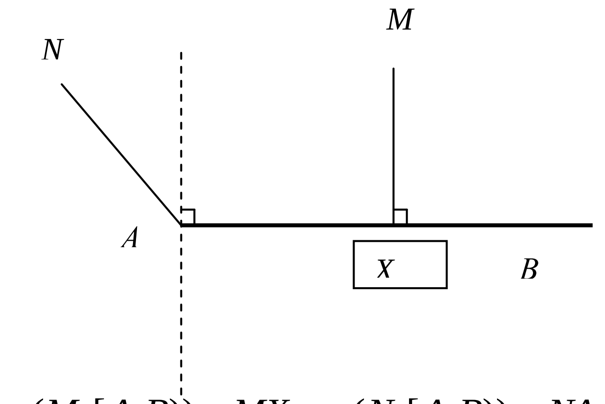
Сходство этих теорем очевидно, поскольку их можно рассматривать в контексте общей ***проблемы:*** пусть F_1 и F_2 являются геометрическими фигурами, а $\rho(M, F_i)$ – расстоянием от точки M до фигуры F_i; найдите множество точек, равноудаленных от двух этих фигур, т.е. удовлетворяющих равенству $\rho(M, F_1) = \rho(M, F_2)$. Действительно, если мы решим эту проблему для того случая, когда каждая из фигур F_i является точкой, мы получим теорему 1. Если же мы решим ее для случая, когда фигуры являются лучами с общим началом, то получим теорему 2.

Описанная ситуация порождает множество естественных вопросов. Прежде всего, почему список фигур F_i столь примитивен? Можно ли, помимо точек и лучей, рассматривать другие геометрические фигуры, например, прямые или окружности? Кроме того, почему мы должны рассматривать специальное расположение лучей во втором случае, а именно, совпадение их вершин? Какие изменения произойдут в решении задачи и ее ответе, если лучи будут, например, параллельны друг другу? Наконец, общий вопрос состоит в том, почему в курсе геометрии рассматриваются расстояния только в простейших случаях, а именно, от точки до прямой или плоскости? Почему не изучаются расстояния от точки до луча или окружности? В определенном смысле курс геометрии упрощает и без того достаточно простую ситуацию, поскольку каждый понимает, что под расстоянием между пловцом и берегом следует понимать расстояние между пловцом и ближайшей точкой берега, сколь бы сложную форму ни имела береговая линия. Предыдущие рассуждения позволили автору поставить перед школьниками такую проблему.

Проблема. Найдите множество точек, равноудаленных от двух геометрических фигур, если каждая из этих фигур выбрана из следующего списка: точка, прямая, луч, окружность.

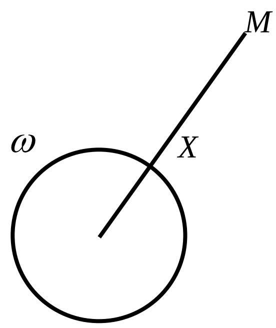
Особенность этой проблемы в том, что школьник вынужден построить весьма разветвленную программу действий. Прежде всего, следует понять и привыкнуть к понятию расстояния от точки до луча и окружности. По определению расстоянием между точкой M и геометрической фигурой F называется наименьшее расстояние между точками A и X, где $X \in F$. (Здесь мы даем определение для замкнутой фигуры F). Таким образом, расстояние от точки до луча вычисляется по-разному в зависимости от того, как расположены друг относительно друга точка и луч (рис. 1а). Вычисление расстояния от точки M до окружности ω показано на рис. 1б.

Из приведенного списка можно образовать десять пар фигур, следовательно, решение задачи будет развиваться по десяти различным направлениям. Наконец, когда пара фигур выбрана, они могут располагаться друг относительно друга самыми различными способами, так что каждое из десяти направлений в свою очередь разбивается на несколько подслучаев, причем заранее отнюдь не очевидно, каковы они.



$$\rho(M,[A,B]) = MX, \quad \rho(N,[A,B]) = NA$$

Рисунок 1а.



$$\rho(M,\omega) = MX$$

Рисунок 1б.

Даже после того, как программа решения задачи составлена, не вполне ясно, какова должна быть последовательность шагов по ее выполнению. Постепенно, однако, становится понятным, что ключевым случаем является построение множества точек, равноудаленных от точки и прямой. Построение этого множества не входит в школьную программу, поскольку связано с фокальным определением параболы, поэтому научный руководитель должен сам сообщить школьникам необходимый материал. Впрочем, изучение фокального определения параболы входит в программу для математических классов.

Приведем фрагмент решения задачи для случая, когда одна из фигур является точкой, а другая окружностью. Пусть F_1 является окружностью с центром O_1 и радиусом R. Пусть F_2 представляет собой точку O_2. Если точка O_2 лежит вне круга, то очевидно, что $\rho(M, F_1)$ равно длине отрезка MA, а $\rho(M, F_2)$ равно длине отрезка MO_2 (рис. 2). Поскольку расстояния от точки M до фигур F_i равны между собой, мы имеем $MO_1 - MO_2 = MA + AO_1 - MO_2 = AO_1 = R = const$. Согласно фокальному определению гиперболы мы получаем, что искомое множество точек является одной ветвью гиперболы с фокусами O_1 и O_2. Очевидно, что в дальнейшем следует рассмотреть случаи, когда точка O_2 лежит на окружности (искомое множество точек является лучом) и внутри круга (искомое множество – эллипс).

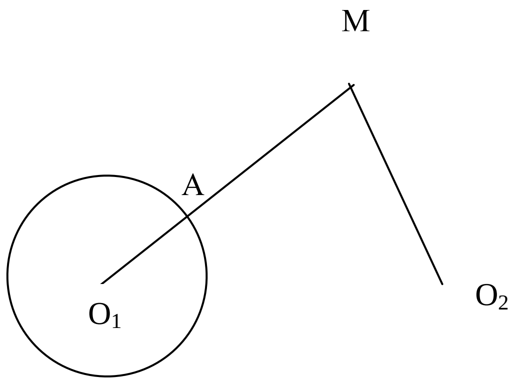


Рисунок 2.

Таким образом, мы снова видим, что школьник выполнил действия, типичные для работы математика-профессионала: поставил, пусть и с помощью научного руководителя, проблему, составил программу ее решения и реализовал ее, получив при этом результаты, которые были отнюдь не очевидны в начале.

4. Элементы псевдоевклидовой геометрии

Очевидно, что научный руководитель должен познакомить школьника с какой-либо областью исследования, вхождение в которую не требует чрезмерно большого времени. Примером такой области может служить псевдоевклидова геометрия. Если говорить об определении самой геометрии, то ее единственное отличие от школьной геометрии состоит в определении скалярного произведения векторов: $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 - a_2 b_2$ (в школьной геометрии на месте знака «минус» стоит знак «плюс»). Общую задачу можно ставить весьма широко: построить элементарную геометрию псевдоевклидовой плоскости. Более конкретная задача состоит в том, чтобы построить геометрию какой-либо геометрической фигуры, например, геометрию окружности.

Под геометрией окружности понимается совокупность определений и теорем, описывающих свойства окружности. Простейший логический ход, вполне доступный учащемуся, состоит в том, чтобы проверить, какие из известных ему многочисленных свойств обычной окружности справедливы для псевдоевклидовой окружности, а какие нет. Таким образом, возникает естественная и достаточно обширная программа действий. Приведем некоторые результаты, которые получаются в процессе ее выполнения.

1) Как обычная, так и псевдоевклидова окружность обладают одним свойством: радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2) Как и в обычной геометрии, прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек, т.е. две, одну или ни одной. Отличие состоит в том, что при наличии точно одной общей точки обычная окружность касается прямой, а псевдоевклидова окружность и прямая могут как касаться, так и пересекаться.

3) Обычная окружность всегда может быть помещена в квадрат, даже если она имеет весьма большой радиус. Псевдоевклидова окружность, даже если она

имеет очень малый радиус, никогда не может быть помещена в квадрат, даже если он весьма велик.

Список сопоставлений подобного рода чрезвычайно обширен, по существу, бесконечен. Учащийся видит, что некоторые свойства обычной окружности он может дословно перенести на случай псевдоевклидовой окружности, некоторые удается перенести при дополнительных уточнениях, а некоторые вообще невозможно перенести. *По сути дела, школьник находится в ситуации, которая может сложиться в процессе реального исследования: с одной стороны, он имеет достаточно ясную программу действий, а с другой стороны, результат каждого действия непредсказуем.* Многолетние наблюдения и беседы со школьниками показывают, что описанная «стихийно» возникшая модель научной деятельности весьма привлекательна для них.

5. Краткий педагогический анализ

Рассмотрим исследовательскую деятельность школьников в контексте обогащающей модели обучения (Холодная М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. – Томск: Изд-во Том. ун-та. Москва: Изд-во «Барс». – 1997).

Несколько утверждений являются в достаточной мере очевидными. А) В процессе решения исследовательских задач учащийся приобретает яркий опыт ***творческой*** деятельности. Б) Длительные занятия привлекательной деятельностью формируют у школьника устойчивый ***интерес*** к ней. В) В результате самостоятельной или совместной с руководителем математической деятельности возрастает ***компетентность*** школьника в области математики. Например, при работе с псевдоевклидовой геометрией он выявляет парадоксальные свойства окружности, знакомится с отрезками нулевой длины, которые при изображении выглядят как «длинные», строит перпендикулярные прямые, которые при изображении выглядят почти параллельными, и т.д. Важно, что школьник не просто формально знакомится с понятиями и фактами псевдоевклидовой геометрии, а *оперирует* ими, поскольку его цель состоит в *формулировке* и *доказательстве* теорем.

Перечислим виды деятельности, которые выполняет учащийся: он слушает лекции преподавателя; читает книги; консультируется с преподавателем; выполняет тренировочные упражнения; ставит исследовательские задачи, самостоятельно или с помощью преподавателя; решает исследовательские задачи; делает литературную запись решения; набирает текст на компьютере; готовит выступление; делает пробные выступления в школе и/или вузе; участвует в конференции. Перечень видов деятельности весьма велик, причем каждый из них является достаточно сложным. Весьма важно, что школьнику приходится заниматься всеми этими видами деятельности одновременно или почти одновременно, или, другими словами, он постоянно переключается с одного вида работы на другой. Тем самым приобретается существенный опыт ***саморегуляции.***

В процессе исследований школьник выступает исполнителем разных социальных ролей. Прежде всего, он находится в тесном творческом и личном контакте с преподавателем вуза, что для школьника, да и для студента младших курсов, само по себе необычно. Кроме того, достаточно быстро он становится обладателем навыков и носителем знаний, которыми не обладают его одноклассники. В процессе тренировочных выступлений он выступает в роли преподавателя. Наконец, на конференции школьник выступает в роли исследователя, который сообщает научному сообществу о результатах своей творческой деятельности. При этом важно, что он имеет возможность сравнить свои личные достижения с достижениями других школьников, которые заняты деятельностью того же самого типа. Вышеперечисленное – компетентность в особой области знаний и интерес к ней, опыт творческой деятельности и саморегуляции, конкретные навыки и исполнение разных социальных ролей – все это формирует ***уникальный*** ментальный опыт школьника.

Собрав вместе слова, выделенные жирным курсивом – компетентность, интерес, творчество, саморегуляция, уникальность – мы видим, что исследовательская деятельность формирует именно те компоненты интеллекта человека, которые, согласно обогащающей модели обучения М.А. Холодной, следует рассматривать при оценке результатов обучения математике (преподавателем или учителем) и изучения ее (школьником или студентом).

Окончательно мы можем сделать вывод о том, что *деятельность научного руководителя, изначально направленная на подготовку математика-профессионала, оказывается хорошо согласованной с психолого-педагогической концепцией обогащающего обучения.* По-видимому, эта согласованность носит объективный характер и выявляет универсальное влияние чисто математической подготовки на процесс образования в целом.

В заключение отметим, что приведенный выше перечень видов деятельности и их краткое описание позволяет утверждать, что в процессе исследовательской работы школьников формируются многие, если на все, ключевые компетенции, приведенные в одном из популярных списков ключевых компетенций А.В. Хуторского: 1) ценностно-смысловая компетенция; 2) общекультурная компетенция; 3) учебно-познавательная компетенция; 4) информационная компетенция; 5) коммуникативная компетенция; 6) социально-трудовая компетенция; 7) личностная компетенция – самосовершенствование.