XXII Российская научная конференция школьников «Открытие»

Секция математики

**Доказательство числовых неравенств нестандартными методами**

*Исследовательская работа*

 Автор – Тимирянова Диана

 Ринатовна, ученица 11 класса МБОУ

 Балезинской «СОШ №5».

 Руководитель – Касимов Рифхат

 Шамилович, педагог дополнительного

 образования Балезинской «СОШ №2»,

 заслуженный учитель Удмуртской

 Республики.

г. Ярославль, 2019

Оглавление:

1. Введение……………………………………………………………………….3

2. Основная часть «Нестандартные, но универсальные способы и методы решения числовых неравенств» ………………………………………………..4

2.1. Часть «Метод касательных в ходе доказательства числовых неравенств»………………………………………………………………………4

2.2. Часть «Метод множителей Лагранжа в ходе доказательства числовых

неравенств»………………………………………………………………………6

2.3. Часть «Метод наименьших квадратов в ходе доказательства числовых неравенств»………………………………………………………………………8

3. Заключение…………………………………………………………………..10

4. Список литературы………………………………………………………….11

5. Приложение №1……………………………………………………………..12

6. Приложение №2……………………………………………………………..15

7. Приложение №3……………………………………………………………..19

**Введение**

Известно, что задачи на доказательство числовых неравенств встречаются в школьной программе по математике уже с 8-го класса. Аналогично эти задачи встречаются и на олимпиадах по математике начиная с муниципальных этапов, завершая всероссийскими и международными. Но к сожалению, читая лишь школьные учебники по математике, а также методические пособия по ним, ученика нельзя научить доказывать более серьезные и сложные числовые неравенства. Анализ общедоступных справочников по математике также подтверждает справедливость этого: в них недостаточно сказано о числовых неравенствах, недостаточно показано способов и методов доказательств более сложных числовых неравенств. Что касается более серьёзных научных пособий по математике тематического характера, в которых очень подробно рассказывается о числовых неравенствах, то они также имеют свои слабые места и недостатки. Дело в том, что в них неравенства подразделяются на типы или виды в зависимости от структуры внешнего вида самого неравенства. И каждое такое неравенство предлагается доказывать способом или методом присущим лишь ему. С одной стороны, это не плохо, но с другой стороны это требует запоминания большего объёма материала. Выход из этого противоречия, заключающегося между большим объёмом информации и необходимостью оперативного их запоминания есть. Для этого необходимо найти универсальные способы, позволяющие одинаково решать все типы или виды задач на доказательство числовых неравенств. В этом и главная цель, и смысл моей исследовательской работы:

1. Найти универсальные способы и методы доказательства числовых неравенств;
2. Найти научное обоснование этих способов и методов;
3. Проверить эти методы на примере сложных числовых неравенств, которые встречались в национальных олимпиадах по математике ряда стран мира.

**Основная часть**

Нестандартные, но универсальные способы и методы решения числовых неравенств

В процессе выполнения данной исследовательской работы, ознакомившись и изучив большой объём научной и ненаучной методической литературы указанной в источниках исследования, я нашла 3 таких способа и метода:

1. Метод касательной к доказательству двух числовых неравенств;
2. Метод множителей Лагранжа при доказательстве числовых неравенств;
3. Метод наименьших квадратов. Я не только нашла и изучила эти способы, но и осуществила теоретическое обоснование этих способов и составила алгоритм, руководствуясь которым результативно доказываются числовые неравенства.

**2.1. Часть**

Метод касательной в ходе доказательства числовых неравенств

Суть этого метода заключается в том, что к внутренней точке любой непрерывной кривой линии, представляющей из себя график той или иной функции можно провести касательную, причём только одну. С другой стороны, в окрестности данной точки, к которой проведена касательная, касательная располагается выше этой кривой линии или ниже. Это продемонстрирую на следующих двух рисунках:

  

 Рис.1 Рис.2

Выше сказанное продублированное рисунками №1 и №2 на языке алгебры означает, что для всех точек любой непрерывной функции и для её касательной, также представляющей функцию, но линейную, всегда будут выполняться одно из 2-х неравенств , , где – уравнение функции, график которой есть кривая линия, а – уравнение прямой линии, представляющей касательную, заданной кривой линии. С другой стороны, знаки неравенств или встречаются и в числовых неравенствах, о которых говорится в данной исследовательской работе. Что касается других аспектов теоретического обоснования данного метода, то я его приведу в составленном мной алгоритме доказательства числовых неравенств этим методом, ну и естественно в комментариях, которыми будут сопровождаться решения тех или иных моих примеров.

Алгоритм доказательства неравенств методом касательных:

1. Определить из структуры и содержания числового неравенства функцию;
2. Определить из условия задачи область определения искомой функции;
3. Составить уравнение касательной к искомой функции в точке, являющейся внутренней точкой данной функции и при которой неравенство превращается в верное числовое равенство;
4. Методом подбора допустимых значений аргумента поставить соответствующий знак между значением функции и её касательной ;
5. Проведя соответствующие алгебраические преобразования, получить доказуемое неравенство.

Обоснование универсальности этого метода приведу на частных примерах, на примере сложных числовых неравенств. Но сам термин универсальность означает, что этот метод как универсальный должен помогать доказывать и простые неравенства, иначе понятие универсальности применительно данному методу теряет смысл.

Простые неравенства и их доказательство приведены в приложении №1 (№1-3).

Как было сказано выше выясним универсальность нашего метода на неравенствах национальных и международных математических олимпиад (Россия). **Пример №7** Пусть даны положительные числа такие, что . Докажите неравенство . *Решение.* Пусть . Можно заметить, что при неравенство превращается в равенство. Составлю уравнение касательной к графику функции в точке :

; ; ; Зная, что , можно утверждать, что . Проведу замену переменных: Складывая неравенства, получаю: . По условию задачи : ; .

Остальные примеры более трудных неравенств и их доказательства приведены в приложении №1 (№8-10).

**2.2. Часть**

 Метод множителей Лагранжа в ходе доказательства числовых неравенств

Метод множителей Лагранжа действует в том случае, когда в условии задачи кроме доказуемого неравенства, дано ещё некоторое соотношение, связывающее переменные. Назову это соотношение уравнением связи. Для раскрытия сути этого метода необходимо рассмотреть 2 стандартных неравенства: (1); (2). Когда возникает необходимость доказательства неравенства (1), пользуюсь тем, что доказываю справедливость этого неравенства для точки , являющейся точкой относительного минимума функции . Тогда справедливость неравенства (1) для всех остальных точек данной поверхности уже очевидна: если неравенство выполняется для точки, в которой функция достигает своего минимума, то оно тем более будет выполняться во всех остальных точках. При доказательстве же неравенства (2) достаточно доказать, что данное неравенство выполняется в точке , являющейся точкой относительного максимума функции . Тогда справедливость неравенства (2) для всех остальных точек поверхности уже очевидна, ведь если неравенство выполняется даже в точке, где функция достигает своего максимума, то тем более оно будет выполняться во всех остальных точках. Следовательно, первая задача, которую необходимо решить при доказательстве неравенств этим способом – найти в зависимости от знака неравенства ( или ) точки относительного максимума или минимума. Эти точки находим по следующему алгоритму:

1. Надо составить функцию , где – это левая часть доказуемого неравенства, - переменные, входящие в состав доказуемого неравенства (количество переменных не ограничено), - уравнение связи, которое получается из условия, накладываемого на переменные , входящие в состав доказуемого неравенства, - независимая переменная (множитель Лагранжа).
2. Нужно приравнять нулю её частные производные по и присоединить уравнение связи. Из полученной системы: найти . Они дадут координаты точки относительного экстремума. Этот метод применим и в случае функций другого числа переменных. Говоря об алгоритме доказательства числовых неравенств методом множителей Лагранжа и о новых понятиях, связанных с ним, необходимо ещё определиться с такими понятиями, как относительный минимум и относительный максимум функции. Пусть дана точка, координаты которой удовлетворяют уравнению связи. Если во всех тех точках некоторой окрестности , ординаты которых также удовлетворяют уравнению связи, выполняется неравенство или , то говорят, что функция имеет относительный максимум (относительный минимум) в точке . **Пример №1** Пусть даны положительные числа такие, что . Докажите неравенство . *Решение.* Составлю функцию  Приравняю к нулю её частные производные по и присоединю уравнение связи: ; ;

Приравняв первое и второе уравнения системы, получаю: ; . Следовательно . Аналогично, приравняв второе и третье уравнения системы, а также третье и четвёртое, получаю, что и соответственно. Значит . По условию задачи . Найду :Раз минимальное значение функции равно 2, получается и все остальные значения больше 2-х. А значит . Требуемое неравенство доказано.

Другие неравенства, решенные методом множителей Лагранжа приведены в приложении №2 (№2-№4).

**2.3. Часть**

Метод наименьших квадратов в ходе доказательства числовых неравенств

Задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых фикция двух переменных и принимает наименьшее значение. То есть, при данных и сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей. В этом вся суть метода наименьших квадратов. Числовые неравенства будут доказываться по следующему алгоритму:

1. Из самого неравенства составить функцию от одной переменной, указать её область определения;
2. Из данной функции, используя метод наименьших квадратов, составить линейную функцию, которая наилучшим образом приближает значения

функции с собственными значениями;

1. Между данной функцией и её линейной фикцией поставить соответствующий знак неравенства;
2. В полученном неравенстве провести замену переменных причём столько раз сколько переменных содержится в доказуемом неравенстве;
3. Сложить эти неравенства, как неравенства одинакового смысла;
4. Используя условия связывающие переменные входящие в неравенства, получить доказуемое неравенство;
5. Целью выяснения того, что функция максимально приближена к своей линейной функции

подсчитать погрешности. **Пример №1** Пусть даны положительные числа такие, что . Докажите неравенство . *Решение.* Рассмотрю функцию . Линейная функция имеет вид . Найду и по соответствующим формулам: (1), (2), где , , , - суммы , , , соответственно; параметр - количество экспериментальных данных. Для удобств вычисления сумм, которые входят в формулы искомых коэффициентов, а также вычисления самих коэффициентов и , заполню таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
|  | 1 | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0,06 | 1,86 |
|  | 0 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,24 | 1,44 |
|  | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 30 |

Подставляя значения в формулы метода наименьших квадратов, получаю: , ; . Следуя алгоритму, поставлю между данной функцией и её линейной соответствующий знак неравенства, зная, что : . В полученном неравенстве проведу четыре замены:;. Сложу эти неравенства, как неравенства одинакового смысла: .По условию , значит: .Зная, что , то и Это и требовалось доказать. Осталось подсчитать погрешность: .

Другие неравенства, решенные методом наименьших квадратов, представлены в приложении №3 (№2-№4).

**Заключение**

1. Таким образом, реализуя основные цели и задачи своей следовательской работы, мне удалось найти 3 универсальных способа доказательства числовых неравенств, причём каждый из которых является нестандартным:
2. метод касательной;
3. метод множителей Лагранжа;
4. метод наименьших квадратов.
5. Я сумела обеспечить состоятельность этих методов на основе:

 а) научного обоснования каждого из перечисленных методов;

 б) практической проверки состоятельности этих методов путём решения задач на доказательство числовых неравенств с международных математических олимпиад и с национальных математических олимпиад ведущих стран мира.

1. Мне удалось оформить полученные результаты исследовательской работы в соответствии с требованиями, предъявленными к оформлению исследовательских работ.

**Список литературы:**

1. Арбит А.В. «Неравенства и основные способы их доказательства.» Часть 1. -М.: Издательство МЦНМО, 2016. (Приложение к журналу «Квант» №3/2016);
2. Гомонов С.А. «Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения.» 10-11кл.: учебное пособие-М.: Дрофа, 2005. -254, [2] с.: ил.-(Элективные курсы);
3. Бохан К.А. и др. «Курс математического анализа т. II. Учеб. Пособие для студентов заочников физ.-мат. фак-тов пед. Ин-тов. Под ред. Проф. Б.З. Вулиха. М., «Просвещение» 1972.
4. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант» сентябрь-декабрь 2015 №5-6;
5. Журнал «Математика. Первое сентября» апрель 2014 №4 (753);
6. Методический журнал для учителей математики №4 (753)-«Математика». Применение касательной к доказательству неравенств-И. Ибатулин, А. Лепес, стр. 20-24.

*Приложение №1*

**Пример №1** Докажите, что сумма взаимообратных положительных чисел больше либо равна 2, т.е. при .  *Решение.* Следуя алгоритму, рассмотрю функцию , . Т.к. данное неравенство превращается в верное равенство при и этаточка является внутренней точкой области определения функции, то составим уравнение касательной к данной функции в данной точке:

; ; ; ;

Считая, что: . В полученном неравенстве проведу замену переменной на переменную : . Что и требовалось доказать. **Пример №2** Докажите, что при и неравенство истинно. *Решение.* Пусть , . Неравенство превращается в верное равенство при , а также эта точка является внутренней точкой области определения функции. Значит можно составить уравнение касательной данной функции в данной точке:

; ; .

Сравним и , зная, что : . Проведём замену переменной на переменные . Складывая неравенства получаем: . По условию , а значит . ; . Что и требовалось доказать.

**Пример №3** Докажите, что истинно при любых значениях . *Решение.* Вначале перенесу правую часть неравенства в левую: . Теперь рассмотрю функцию , . Т.к. данное неравенство превращается в верное равенство при и эта точка является внутренней точкой области определения функции, то составлю уравнение касательной к данной функции в данной точке:

; ; ; ;

Зная, что , сравню и :

В полученном неравенстве проведу замену переменной на переменную : .

**Пример №8**  Пусть даны неотрицательные числа . Докажите, что

*Решение.* Поскольку требуемое неравенство является однородным, то его

достаточно доказать в случае, когда . В этом случае неравенство запишется в следующем виде:Рассмотрю функцию , область определения которой . Данное неравенство превращается в верное равенство при . Тогда составлю уравнение касательной к графику функции в этой точке:

; ; ; .

Можно заметить, что неравенство является верным для всякого . Проведя замену переменных, получаю:

 ;

 Зная, что : Требуемое неравенство доказано.

**Пример №9**  Пусть даны неотрицательные числа такие, что .

Докажите неравенство .

*Решение.*Пусть, . Составлю уравнение касательной к графику функции в точке :

; ; ;; .

Зная, что, справедливо утверждать, что . Проведу замену переменных: ; ; ;

 . По условию : ; (

 ; . Что и требовалось доказать.

**Пример №10** Пусть даны положительные числа такие, что . Докажите неравенство . *Решение.*Рассмотрю функцию , область определения которой. Составлю уравнение касательной к графику функции в точке:

; ; .

Теперь необходимо сравнить и . При справедливо неравенство . Проведу замену переменных:Сложив все четыре неравенства, получаю: По условию задачи :

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

*Приложение №2*

**Пример №2** Пусть даны неотрицательные числа . Докажите, что *Решение.* Поскольку требуемое неравенство является однородным, то его

достаточно доказать в случае, когда . В этом случае неравенство запишется в

следующем виде: Составлю функцию  Приравняю к нулю её частные производные по и присоединю

уравнение связи: ; ;

Поступлю так же, как и в предыдущем примере. Вначале приравняю первое и второе, а затем

второе и третье уравнения системы: . Преобразовав обе части уравнения, получаю, что . Т.к. и левая и правая части представляют собой монотонные функции, то . Аналогично и доказывается, что . Если и , то . Осталось найти лишь : Поскольку , то будет точно . Значит . Что и требовалось доказать.

**Пример №3** Пусть даны неотрицательные числа такие, что . Докажите неравенство .

*Решение.* Составлю функцию

 ;

Приравняю первое и второе уравнения системы: Преобразовав это уравнение, получаю: Обе части этого уравнения, и левая и правая, представляют собой монотонные функции, а это значит, что . Аналогично, приравняв второе и третье уравнения, можно получить, что . Если и , то .

По условию задачи , а также зная, что , можно найти значения этих чисел: .

 Найду :

Зная, что

Получается . Таким образом, требуемое неравенство доказано.

**Пример №4** Пусть даны положительные числа такие, что . Докажите неравенство . *Решение.* Составлю функцию

Приравняю к нулю её частные производные по и присоединю

уравнение связи: ; ;

Приравняв первое и второе уравнения системы, получаю:

;

. Следовательно .

Аналогично, приравняв второе и третье уравнения системы, а также третье и четвёртое, получаю, что и соответственно. Значит . По условию задачи . Найду :Раз максимальное значение функции равно , получается и все остальные значения меньше этого числа. А значит . Требуемое неравенство доказано.

*Приложение №3*

**Пример №2** Пусть даны неотрицательные числа . Докажите, что  *Решение.* Поскольку требуемое неравенство является однородным, то его достаточно доказать в случае, когда . В этом случае неравенство запишется в следующем виде:

Пусть , . Линейная функция имеет вид . Найду и по формулам (1) и (2) представленным в предыдущем примере.

Как и в предыдущем примере, заполню таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,8 | 3 | 4,5 |
|  | 1 | 1,29 | 1,81 | 2,36 | 2 | 8,46 |
|  | 0 | 0,26 | 0,91 | 1,89 | 6 | 9,06 |
|  | 0 | 0,04 | 0,25 | 0,64 | 9 | 9,93 |

Получаю, что , ; . Т.к. , то . В полученном неравенстве проведу три замены:  Сложу эти неравенства, как неравенства одинакового смысла: Зная, что : . Т.к. Что и требовалось доказать. В конце оценю лишь погрешность метода наименьших квадратов применительно данного неравенства: .

**Пример №3**

Пусть даны неотрицательные числа такие, что . Докажите неравенство .

*Решение.* Рассмотрю функцию , . Линейная функция имеет вид . Найду и по соответствующим формулам: (1), (2),

 где , , , - суммы , , , соответственно; параметр - количество экспериментальных данных. Для удобств вычисления сумм, которые входят в формулы искомых коэффициентов, а также вычисления самих коэффициентов и , заполню таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
|  | 0 | 0,5 | 1,33 | 2,25 | 3,2 | 7,28 |
|  | 0 | 0,5 | 2,66 | 6,75 | 12,8 | 22,71 |
|  | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 30 |

Подставляя значения в формулы метода наименьших квадратов, можно получить: , ;.

Зная, что : . В полученном неравенстве проведу три замены:

Сложу эти неравенства: . По условию , а значит .

Т.к. , то точно , т.е. .

Осталось лишь оценить погрешность метода наименьших квадратов применительно данного неравенства: .

**Пример №4** Пусть даны положительные числа такие, что . Докажите неравенство . *Решение.* Рассмотрю функцию , . Линейная функция имеет вид . Найду и по соответствующим формулам (1) и (2) из примера №3. Заполню таблицу, которая поможет мне вычислять суммы, входящие в формулы искомых коэффициентов, а также сами коэффициенты и :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
|  | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,05 | 0,04 | 0,33 |
|  | 0 | 0,08 | 0,14 | 0,15 | 0,16 | 0,53 |
|  | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 30 |

Подставляя значения в формулы метода наименьших квадратов, получаю: , ; . Следуя алгоритму, поставлю между данной функцией и её линейной соответствующий знак неравенства, зная, что : В полученном неравенстве проведу четыре замены: Сложу эти неравенства как неравенства одинакового смысла: По условию задачи : Можно заметить, что , а как известно . Это означает, что само выражение будет также . Это и требовалось доказать.

Осталось лишь оценить погрешность метода наименьших квадратов применительно данного неравенства: .