XXII Российская научная конференция школьников «Открытие»

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ИРРАЦИОНАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА**

Исследовательская работа

**Лебедев Андрей Алексеевич,**

обучающийся 11 класса

Исаковской средней школы.

д. Исаково, Удмуртской Республики

**Научный руководитель –**

**Касимов Рифхат Шамилович**

педагог дополнительного образования

Балезинской СОШ №2

г. Ярославль, 2019 г.

**Содержание**

1. Введение …………………………………………………...………….…...….3
2. Основная часть. Исследование одного иррационального неравенства
   1. Исследование исходного неравенства (его доказательство) ………...…4
   2. Получение новых иррациональных неравенств из исходного неравенства и их доказательства ………………………….……..…….…9
   3. Получение новых олимпиадных неравенств ……………...…………....13
3. Заключение………………………………………………………………...…14
4. Список литературы…………………………………………………………..15

**Введение**

Занимаясь углублённым изучением математики, я не только посещаю занятия кружка, но и активно участвую на математических олимпиадах и в турнирах. На одной из таких олимпиад мне встретилась задача следующего содержания:

« Докажите неравенство »

В последствии точно такую же задачу с теми же буквенными обозначениями я встретил в учебном пособии по математике «Форсированный курс подготовки к экзамену по математике. Практикум. А.М. Титоренко». Данная задача, наверно, как и любая другая нестандартная, привлекла моё внимание, и я начал её исследовать, посвятив ей данную исследовательскую работу. Естественно, я начал своё исследование с определения корректности задачи. Нашёл условия при которых имеет смысл каждое подкоренное выражение, в частности и всё неравенство в целом. Затем определился с целями и задачами исследования, его этапами и вместе с руководителем составили план-график проведения исследования. Таким образом, в качестве цели исследования мы определили решение данной задачи, а затем использование его результатов для решения похожих задач, также имеющих нестандартный вид и статус олимпиадных. В качестве основных задач мы определили поиск и подбор необходимой литературы, изучение основных тем, связанных с исследуемой задачей, поиск путей и подходов к решению данной задачи, используя эти найденные материалы.

**Исследование исходного неравенства (его доказательство)**

Прежде чем доказать данное неравенство в общем виде, обратим внимание на структуру этого неравенства и на числа *a,b,c,* входящие в качестве компонентов в состав неравенства. Это необходимо для того, чтобы на конкретных примерах определить качество задачи на предмет её корректности. С другой стороны, для того, чтобы найти пути, способы и методы для решения задачи в общем виде.



Проверим составленные на конкретных примерах неравенства на их истинность.

1.

*(^2)*

16≥12 (верно)

2. *(^2)*

*(^2)*

(верно)

3. (верно)

4. (верно)

5. *(^2)*

(верно)

Теперь докажем исходное неравенство в общем виде. Сначала докажем обычным классическим способом путём возведения обеих частей неравенства в квадрат. С целью избавления от иррациональных выражений обе части неравенства будем возводить в квадрат столько раз, сколько понадобится для достижения цели.

Определим область определения функций, входящих в обе части доказуемого неравенства.

Т.к. дискриминант не может принимать положительные значения, то только при выражение может быть равен 0. При иных значениях ( ) неравенство только больше 0.

Т.к. дискриминант не может принимать положительные значения, то только при выражение может быть равен 0. При иных значениях ( ) неравенство только больше 0.

Т.к. дискриминант не может принимать положительные значения, то только при выражение может быть равен 0. При иных значениях ( ) неравенство только больше 0.

Из всего вышеизложенного следует, что при любых значениях подкоренные выражения больше либо равны 0. Таким образом, при любых действительных значениях это неравенство имеет смысл, в том числе и при . Значит задача является корректной. Осталось доказать справедливость данного неравенства.

Т.к. левая и правая части одновременно положительные, то можно возвести обе части в квадрат.

Что и требовалось доказать, т.к. полный квадрат при любых *a,b,c* есть величина неотрицательная.

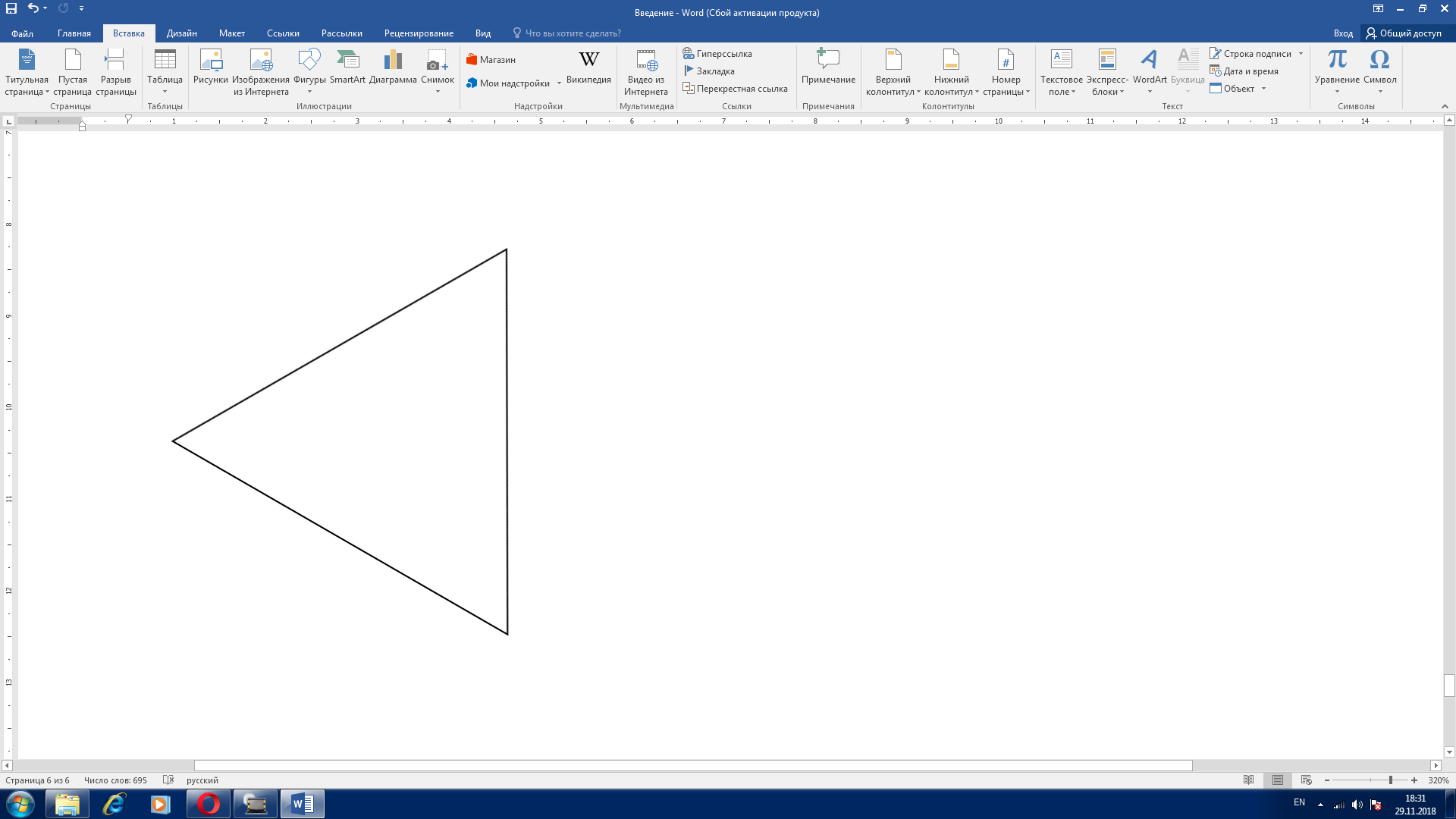
Как обычно, в процессе доказательства числовых неравенств требуется выяснить условие, при котором будет выполняться равенство между левой и правой частями, входящими в структуру соответствующего неравенства.

Это означает, чтобы у этого неравенства выполнялось равенство, достаточно, чтобы при любых значениях *а* и *с*, соответствующих условию задачи.

Нетрудно заметить, что данный способ, несмотря на то, что он привёл нас к поставленной цели, имеет существенные недостатки. К его недостаткам можно отнести:

1. Продолжительность во времени, что может привести естественным образом к вычислительным ошибкам.
2. Данный способ требует чрезмерной концентрации внимания, следовательно, и особого напряжения ученика или ученицы, выполняющего эти преобразования.
3. Отсутствие красоты и изящности: в этом способе нет каких-то нестандартных подходов и интересных идей.
4. Данный способ нельзя считать рациональным из-за большого количества математических преобразований и вычислений.

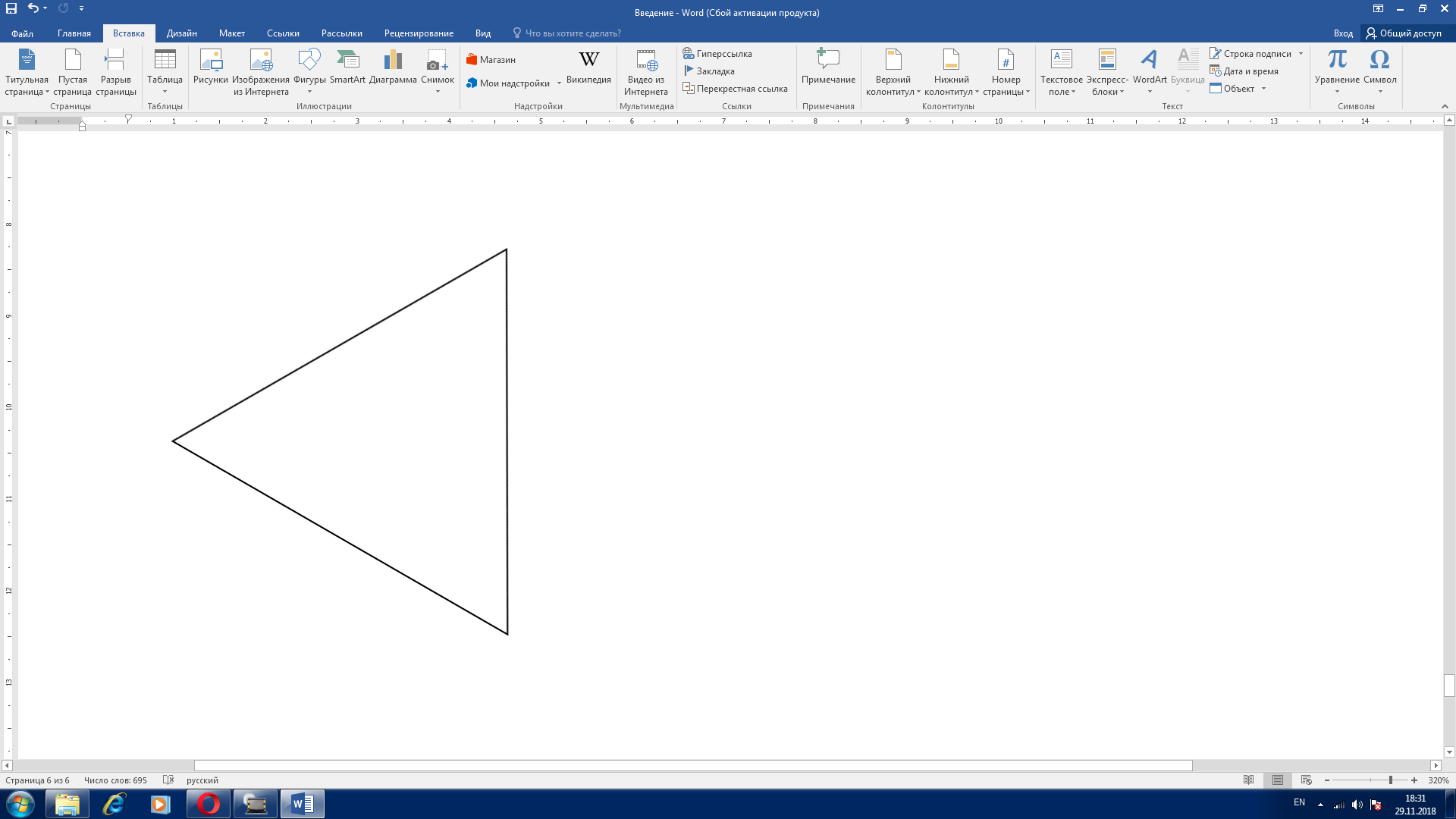
В процессе исследования данной задачи я ещё нашёл второй способ её решения, используя методику сведения алгебраической задачи к геометрической, базирующейся на известной теореме косинусов.

Пусть

*a*

*b*

*m*

Пусть

*c*

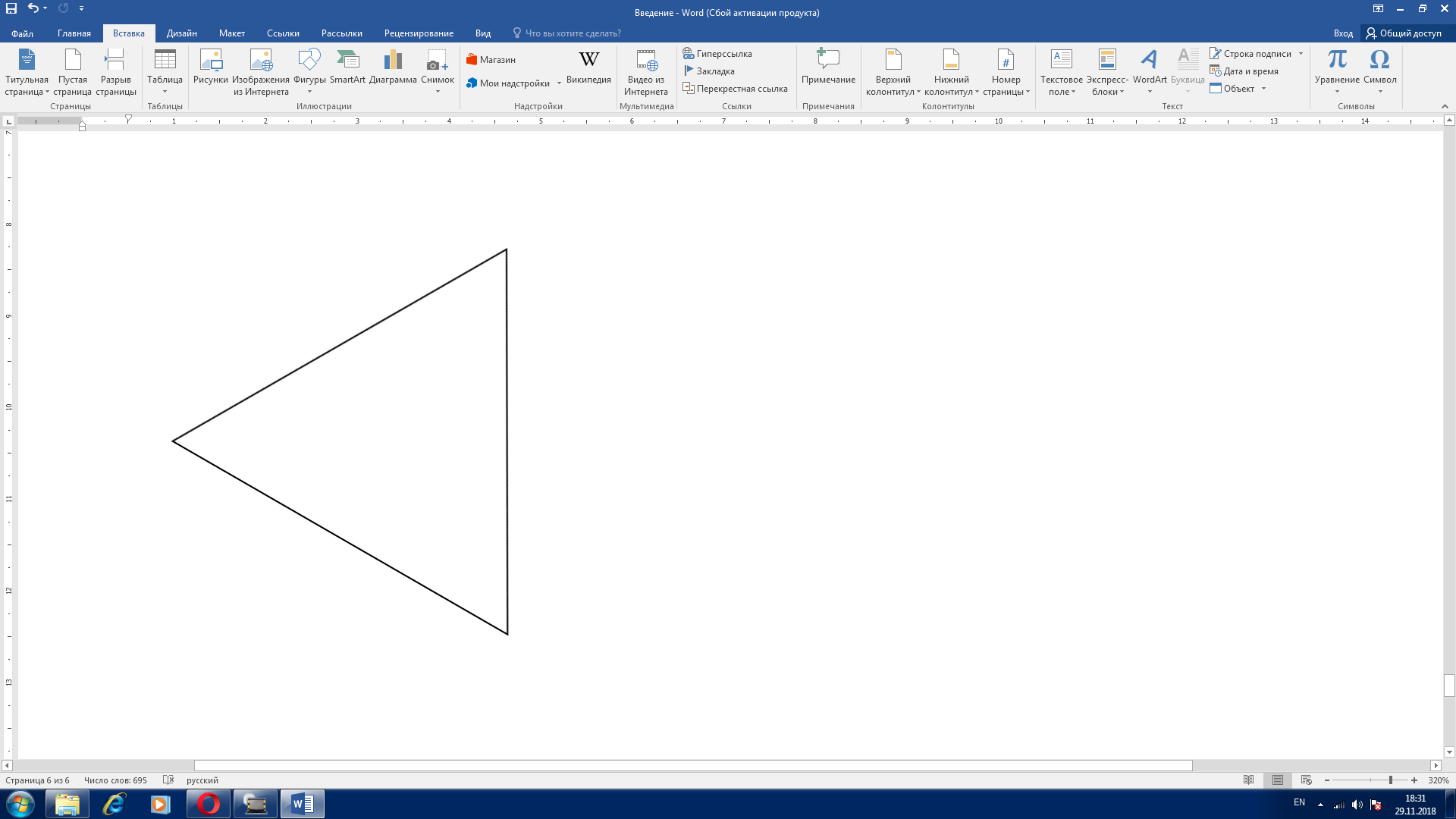
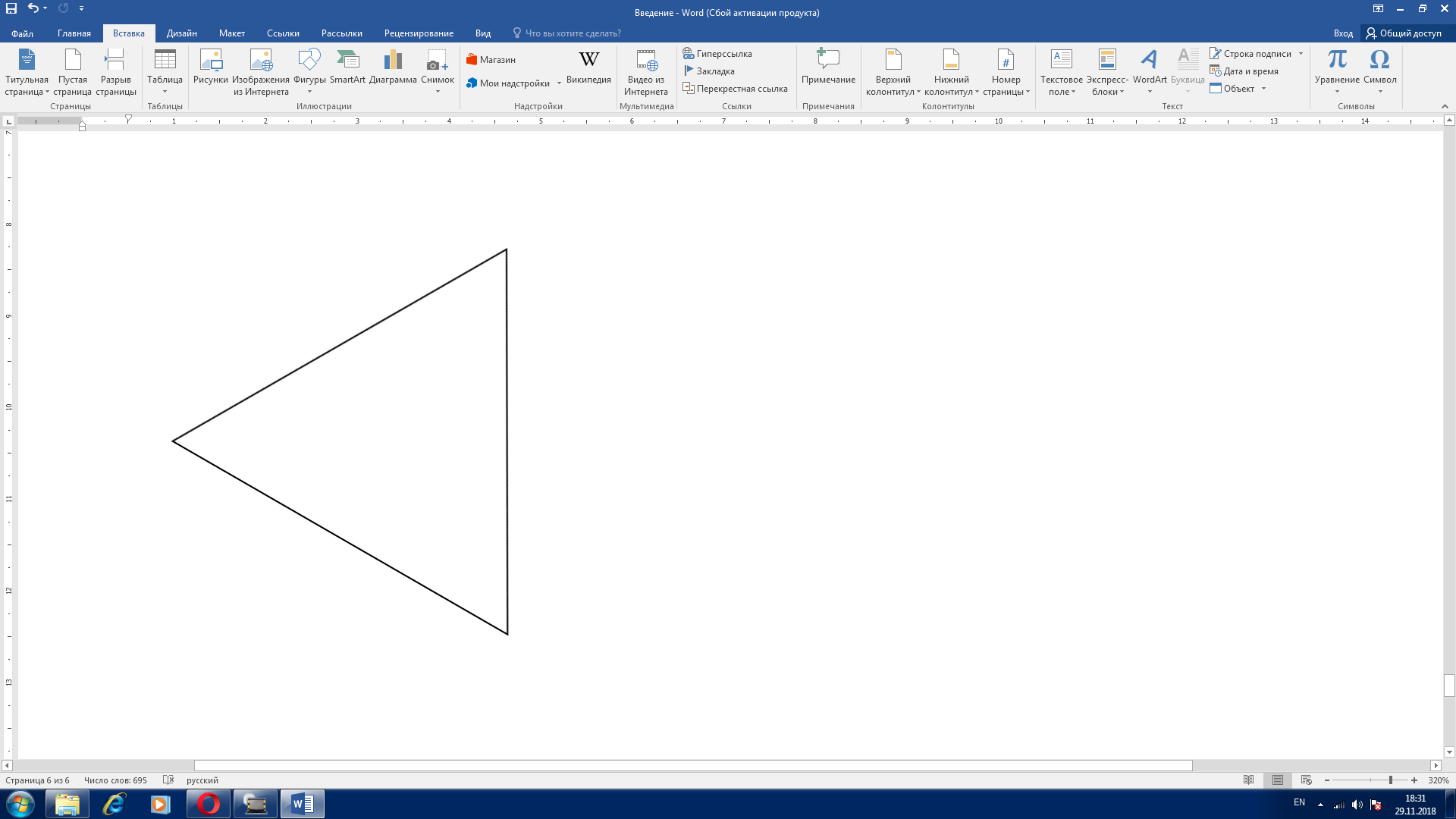
*b*

*n*

Пусть

*a*

*c*

Совместив 3 изображения в одно, получим:

*c*

*a*

*k*

*m*

*n*

Значит,

Естественно данный способ не только изящный, но более эффективный и более рациональный. Действительно, используемые в ходе доказательства геометрические идеи быстрее приводят к поставленной цели.

**Получение новых иррациональных неравенств из исходного**

**неравенства и их доказательства**

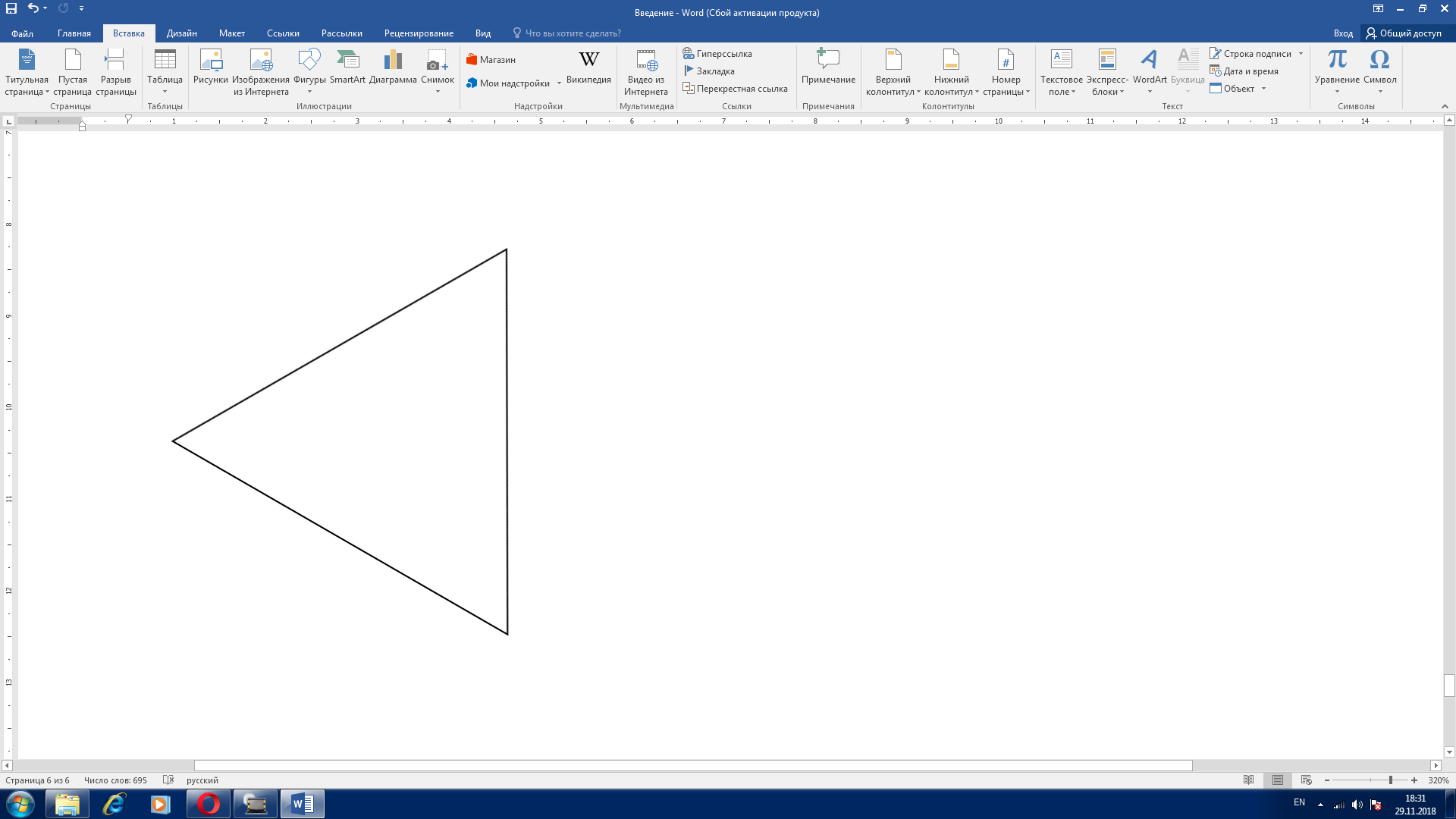
В процессе доказательства данного неравенства в общем виде мы убедились, что оно выполняется не только при положительных значениях *a,b,c,* а выполняется, когда *a,b,c* принимают значения равные 0, и когда *a,b,c* являются отрицательными числами. Чтобы сказанное было более убедительным:

1. Вместо *a,b,c* подставим значения, равные 0, тогда получим 0≥0, что является истинным неравенством.
2. Докажем неравенство

Данное тождество доказывает, что исходное неравенство может выполнятся так же и при отрицательных числах *a,b* и *c.*

В процессе доказательства мне удалось доказать, что:

Доказательство:

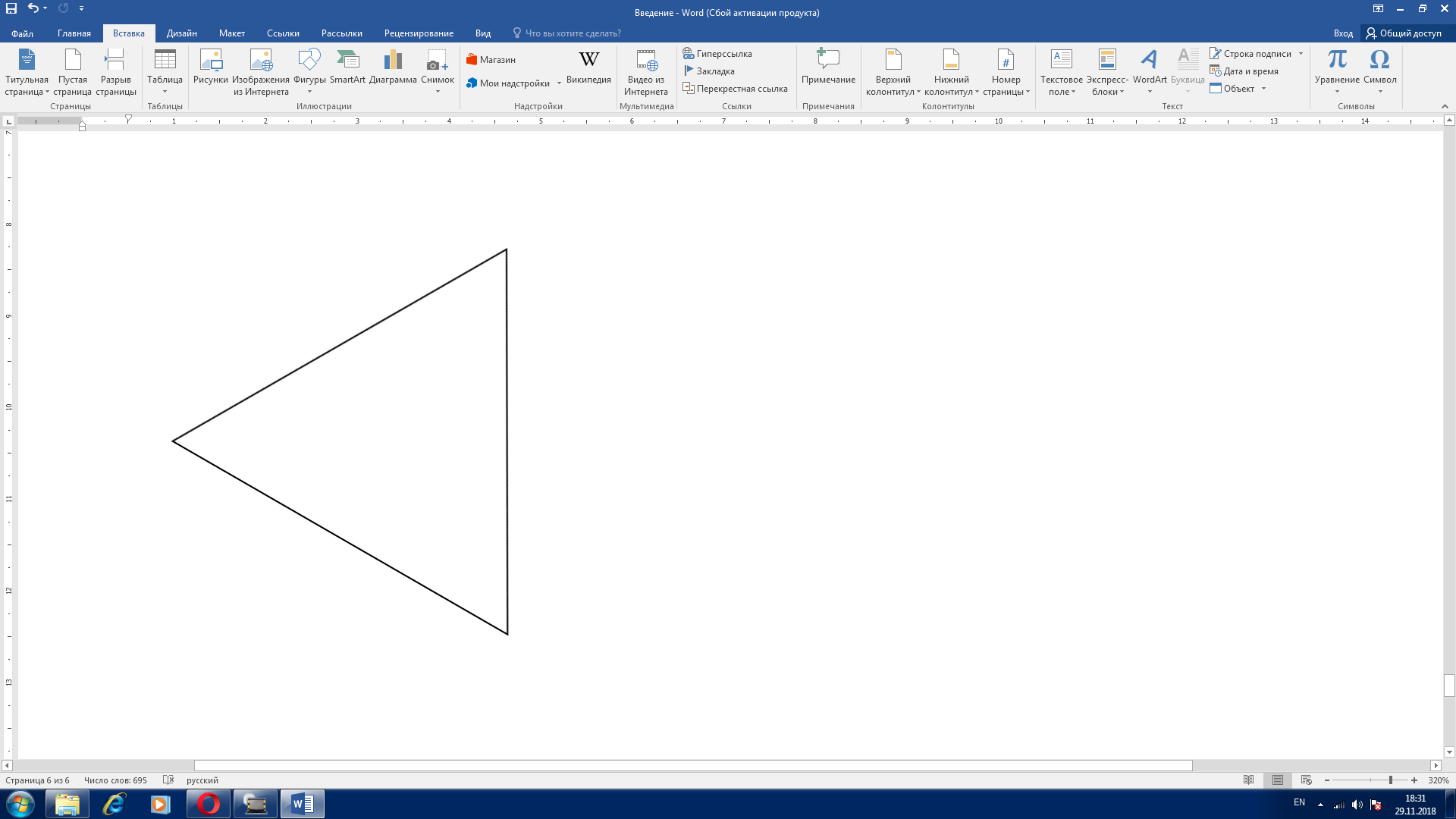
Пусть

*α*

*a*

*b*

*m*

Пусть

*β*

*c*

*b*

*n*

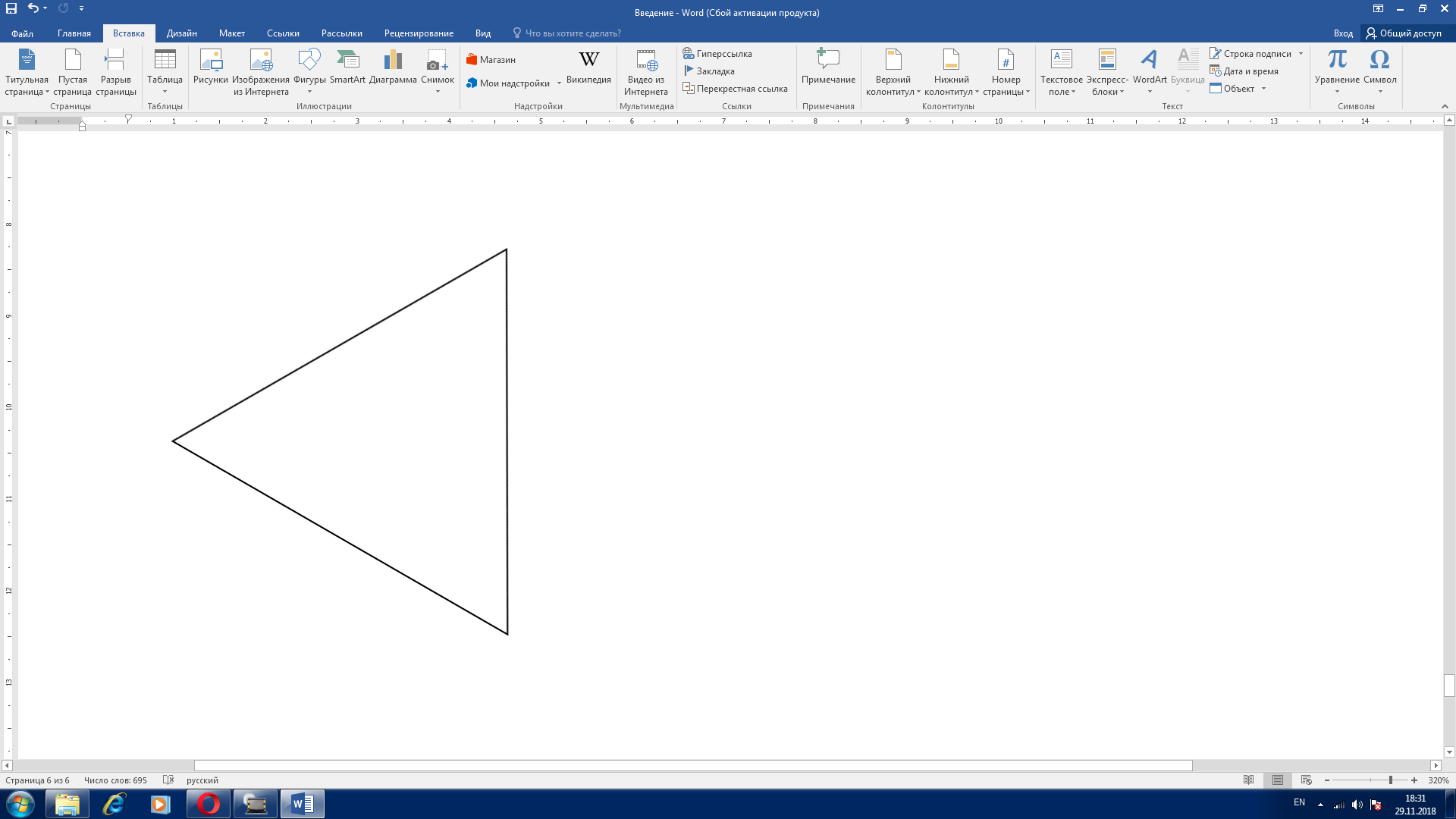
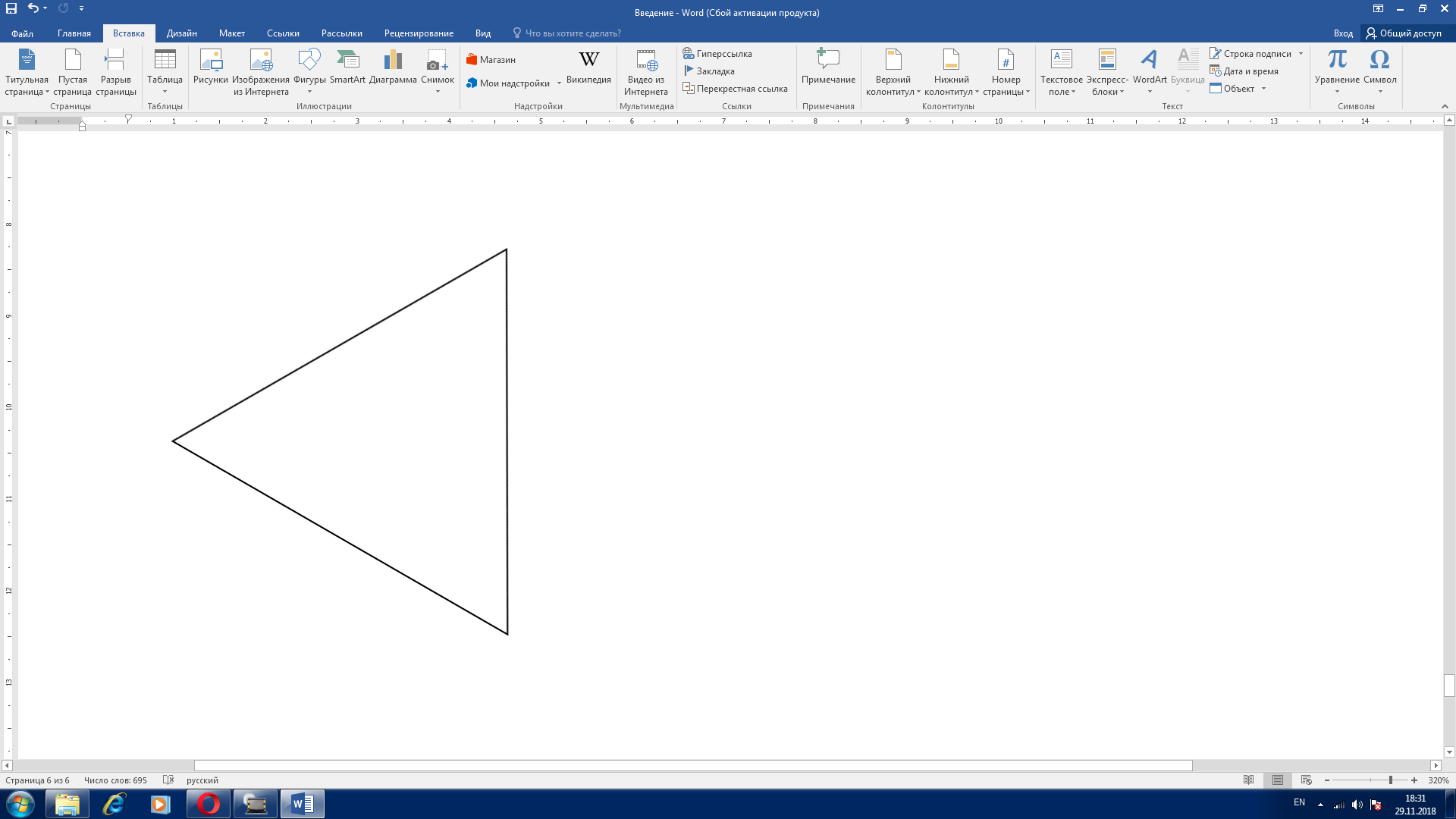
Пусть

*(α+β)*

*a*

*c*

*k*

Совместив 3 изображения в одно, получим:

*β*

*α*

*c*

*a*

*k*

*m*

*n*

А значит,

Данное неравенство так же выполняется при любых значениях *a,b* и *c*:

|  |  |
| --- | --- |
| 1 случай. | 4 случай. |
| (верно) | (верно по условию случая) |
| 2 случай. | 5 случай. |
| (верно по условию случая) | (верно по условию случая) |
| 3 случай. | 6 случай. |
| (верно по условию случая) | (верно) |

Заменив синусы и косинус по формулам приведения приведём данное неравенство к общему виду:

Доказательство данного неравенства схоже с рассмотренным ранее (стр.10)

**Получение олимпиадных неравенств и их доказательство**

В продолжении своего исследования я составил несколько неравенств, кото-рые можно без труда решить, используя результаты нашей исследовательской работы.

**Заключение**

Таким образом, мне удалось реализовать все цели и задачи, стоящие передо мной в процессе исследования, а именно:

1. Удалось показать, что исходное неравенство имеет несколько способов доказательства.
2. Удалось доказать, что исходное неравенство выполняется не только при положительных, но и при отрицательных числах *a, b, c.*
3. Удалось выяснить условие равенства левой и правой части исходного неравенства.
4. Используя результаты исследования, удалось составить задачи на доказательство неравенств повышенного уровня сложности.

**Список литературы**

1. Балаян Э.Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ: 9-11 классы.
2. Саакян С.М. и др. Задачи по алгебре и началам анализа. Пособие для учащихся 10-11 кл. общеобразоват. учреждений.
3. Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы (с решениями). Книга 1. Алгебра.
4. Титаренко А.М. Математика:9-11 классы: 6000 задач и примеров.