XXII Российская научная конференция школьников «Открытие»

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКА

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ИРРАЦИОНАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА**

Исследовательская работа

**Лебедев Андрей Алексеевич,**

обучающийся 11 класса

Исаковской средней школы.

д. Исаково, Удмуртской Республики

**Научный руководитель –**

**Касимов Рифхат Шамилович**

педагог дополнительного образования

Балезинской СОШ №2

г. Ярославль, 2019 г.

**Содержание**

1. Введение …………………………………………………...………….…...….3
2. Основная часть. Исследование одного иррационального неравенства
	1. Исследование исходного неравенства (его доказательство) ………...…4
	2. Получение новых иррациональных неравенств из исходного неравенства и их доказательства ………………………….……..…….…9
	3. Получение новых олимпиадных неравенств ……………...…………....13
3. Заключение………………………………………………………………...…14
4. Список литературы…………………………………………………………..15

**Введение**

Занимаясь углублённым изучением математики, я не только посещаю занятия кружка, но и активно участвую на математических олимпиадах и в турнирах. На одной из таких олимпиад мне встретилась задача следующего содержания:

« Докажите неравенство $\sqrt{a^{2}-ab+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-cb+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}+ac+c^{2}} ;a,b,c>0$ »

В последствии точно такую же задачу с теми же буквенными обозначениями я встретил в учебном пособии по математике «Форсированный курс подготовки к экзамену по математике. Практикум. А.М. Титоренко». Данная задача, наверно, как и любая другая нестандартная, привлекла моё внимание, и я начал её исследовать, посвятив ей данную исследовательскую работу. Естественно, я начал своё исследование с определения корректности задачи. Нашёл условия при которых имеет смысл каждое подкоренное выражение, в частности и всё неравенство в целом. Затем определился с целями и задачами исследования, его этапами и вместе с руководителем составили план-график проведения исследования. Таким образом, в качестве цели исследования мы определили решение данной задачи, а затем использование его результатов для решения похожих задач, также имеющих нестандартный вид и статус олимпиадных. В качестве основных задач мы определили поиск и подбор необходимой литературы, изучение основных тем, связанных с исследуемой задачей, поиск путей и подходов к решению данной задачи, используя эти найденные материалы.

**Исследование исходного неравенства (его доказательство)**

Прежде чем доказать данное неравенство в общем виде, обратим внимание на структуру этого неравенства и на числа *a,b,c,* входящие в качестве компонентов в состав неравенства. Это необходимо для того, чтобы на конкретных примерах определить качество задачи на предмет её корректности. С другой стороны, для того, чтобы найти пути, способы и методы для решения задачи в общем виде.

1. $\left\{\begin{array}{c}a=2\\b=2\\c=2\end{array}\right.$$\sqrt{4-4+4}+\sqrt{4-4+4}\geq \sqrt{4+4+4}$
2. $\left\{\begin{array}{c}a=1\\b=2\\c=3\end{array}\right.$$\sqrt{1-2+4}+\sqrt{9-6+4}\geq \sqrt{1+3+9}$
3. $\left\{\begin{array}{c}a=0\\b=10\\c=5\end{array}\right.$$\sqrt{100}+\sqrt{100-50+25}\geq \sqrt{25}$
4. $\left\{\begin{array}{c}a=-0.5\\b=-3\\c=0\end{array}\right.$$\sqrt{0,25-1,5+9}+\sqrt{9}\geq \sqrt{0,25}$
5. $\left\{\begin{array}{c}a=-2.5\\b=2\\c=-1\end{array}\right.$$\sqrt{6,25+5+4}+\sqrt{1+2+4}\geq \sqrt{6,25-2,5+1}$

Проверим составленные на конкретных примерах неравенства на их истинность.

1.$\sqrt{4}+\sqrt{4}\geq \sqrt{12}$

$4\geq 2\sqrt{3} $ *(^2)*

16≥12 (верно)

2. $\sqrt{3}+\sqrt{7}\geq \sqrt{13}$ *(^2)*

$\sqrt{21}\geq 3$ *(^2)*

$21\geq 9$ (верно)

3. $10+\sqrt{75}\geq 5$ (верно)

4. $\sqrt{7,75}+3\geq 0,5$ (верно)

5. $\sqrt{15,25}+\sqrt{7}\geq \sqrt{4,75}$ *(^2)*

$\sqrt{106,75}\geq -17,5$ (верно)

Теперь докажем исходное неравенство в общем виде. Сначала докажем обычным классическим способом путём возведения обеих частей неравенства в квадрат. С целью избавления от иррациональных выражений обе части неравенства будем возводить в квадрат столько раз, сколько понадобится для достижения цели.

Определим область определения функций, входящих в обе части доказуемого неравенства.

$$a^{2}-ab+b^{2}\geq 0$$

$$a^{2}-ab+b^{2}=0$$

$$A=1;B=-b;C=b^{2}$$

$$D=b^{2}-4b^{2}=-3b^{2}$$

Т.к. дискриминант не может принимать положительные значения, то только при $b=0$ выражение $a^{2}-ab+b^{2}$ может быть равен 0. При иных значениях ( $b\in (-\infty ;0)∪(0;+\infty )$ ) неравенство только больше 0.

$$c^{2}-cb+b^{2}\geq 0$$

$$c^{2}-cb+b^{2}=0$$

$$A=1;B=-b;C=b^{2}$$

$$D=b^{2}-4b^{2}=-3b^{2}$$

Т.к. дискриминант не может принимать положительные значения, то только при $b=0$ выражение $c^{2}-cb+b^{2}$ может быть равен 0. При иных значениях ( $b\in (-\infty ;0)∪(0;+\infty )$ ) неравенство только больше 0.

$$a^{2}+ac+c^{2}\geq 0$$

$$a^{2}+ac+c^{2}=0$$

$$A=1;B=-c;C=c^{2}$$

$$D=c^{2}-4c^{2}=-3c^{2}$$

Т.к. дискриминант не может принимать положительные значения, то только при $c=0$ выражение $a^{2}+ac+c^{2}$ может быть равен 0. При иных значениях ( $c\in (-\infty ;0)∪(0;+\infty )$ ) неравенство только больше 0.

Из всего вышеизложенного следует, что при любых значениях $a,b,c$ подкоренные выражения больше либо равны 0. Таким образом, при любых действительных значениях $a,b,c$ это неравенство имеет смысл, в том числе и при $a>0;b>0;c>0$. Значит задача является корректной. Осталось доказать справедливость данного неравенства.

Т.к. левая и правая части одновременно положительные, то можно возвести обе части в квадрат.

$$\sqrt{a^{2}-ab+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-cb+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}+ac+c^{2}} (\^2)$$

$$(\sqrt{a^{2}-ab+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-cb+b^{2}})^{2}\geq a^{2}+ac+c^{2}$$

$$a^{2}-ab+b^{2}+2\sqrt{a^{2}-ab+b^{2}}\sqrt{c^{2}-cb+b^{2}}+c^{2}-cb+b^{2}\geq a^{2}+ac+c^{2}$$

$$2b^{2}-ab-bc-ac+2\sqrt{a^{2}-ab+b^{2}}\sqrt{c^{2}-cb+b^{2}}\geq 0$$

$$2\sqrt{a^{2}-ab+b^{2}}\sqrt{c^{2}-cb+b^{2}}\geq ab+bc+ac-2b^{2}$$

$$(2\sqrt{(a^{2}-ab+b^{2})(c^{2}-cb+b^{2})})^{2}\geq (ab+bc+ac-2b^{2})^{2}$$

$$4b^{4}+4a^{2}c^{2}+4b^{2}c^{2}+4a^{2}b^{2}+4ab^{2}c-4a^{2}bc-4abc^{2}-4b^{3}c-4ab^{3}\geq 4b^{4}+a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+a^{2}c^{2}+2a^{2}bc+2abc^{2}-2ab^{2}c-4b^{3}c-4ab^{3}$$

$$3a^{2}c^{2}+3a^{2}b^{2}+3b^{2}c^{2}+6ab^{2}c-6a^{2}bc-6abc^{2}\geq 0 (:3)$$

$$a^{2}c^{2}+a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+2ab^{2}c-2a^{2}bc-2abc^{2}\geq 0$$

$$(ab+bc-ac)^{2}\geq 0$$

Что и требовалось доказать, т.к. полный квадрат при любых *a,b,c* есть величина неотрицательная.

Как обычно, в процессе доказательства числовых неравенств требуется выяснить условие, при котором будет выполняться равенство между левой и правой частями, входящими в структуру соответствующего неравенства.

$$ab+bc-ac=0$$

$$b=\frac{ac}{a+c}$$

Это означает, чтобы у этого неравенства выполнялось равенство, достаточно, чтобы $b=\frac{ac}{a+c}$ при любых значениях *а* и *с*, соответствующих условию задачи.

Нетрудно заметить, что данный способ, несмотря на то, что он привёл нас к поставленной цели, имеет существенные недостатки. К его недостаткам можно отнести:

1. Продолжительность во времени, что может привести естественным образом к вычислительным ошибкам.
2. Данный способ требует чрезмерной концентрации внимания, следовательно, и особого напряжения ученика или ученицы, выполняющего эти преобразования.
3. Отсутствие красоты и изящности: в этом способе нет каких-то нестандартных подходов и интересных идей.
4. Данный способ нельзя считать рациональным из-за большого количества математических преобразований и вычислений.

В процессе исследования данной задачи я ещё нашёл второй способ её решения, используя методику сведения алгебраической задачи к геометрической, базирующейся на известной теореме косинусов.

$$\sqrt{a^{2}-ab+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-cb+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}+ac+c^{2}} $$

Пусть $m=\sqrt{a^{2}-ab+b^{2}};a,b,m-стороны треугольника$

*a*

*b*

$$\cos(\left(a\^b\right))=0.5$$

$$\left(a\^b\right)=60°$$

*m*

Пусть $n=\sqrt{b^{2}-bc+c^{2}}; b,c,n-стороны треугольника$

*c*

*b*

$$\cos(\left(b\^c\right))=0.5$$

$$\left(b\^c\right)=60°$$

*n*

Пусть $k=\sqrt{a^{2}+ac+c^{2}}; a,c,k-стороны треугольника$

*a*

*c*

$$\cos(\left(a\^c\right))=-0.5$$

$$\left(a\^c\right)=120°$$

Совместив 3 изображения в одно, получим:

*c*

*a*

*k*

*m*

$m+n\geq k$

*n*

Значит, $\sqrt{a^{2}-ab+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-cb+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}+ac+c^{2}} $

Естественно данный способ не только изящный, но более эффективный и более рациональный. Действительно, используемые в ходе доказательства геометрические идеи быстрее приводят к поставленной цели.

**Получение новых иррациональных неравенств из исходного**

**неравенства и их доказательства**

В процессе доказательства данного неравенства в общем виде мы убедились, что оно выполняется не только при положительных значениях *a,b,c,* а выполняется, когда *a,b,c* принимают значения равные 0, и когда *a,b,c* являются отрицательными числами. Чтобы сказанное было более убедительным:

1. Вместо *a,b,c* подставим значения, равные 0, тогда получим 0≥0, что является истинным неравенством.
2. Докажем неравенство

$$\sqrt{a^{2}+ab+b^{2}}+\sqrt{c^{2}+cb+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}+ac+c^{2}} (\^2)$$

$$(\sqrt{a^{2}+ab+b^{2}}+\sqrt{c^{2}+cb+b^{2}})^{2}\geq a^{2}+ac+c^{2}$$

$$a^{2}+ab+b^{2}+2\sqrt{a^{2}+ab+b^{2}}\sqrt{c^{2}+cb+b^{2}}+c^{2}+cb+b^{2}\geq a^{2}+ac+c^{2}$$

$$2\sqrt{a^{2}+ab+b^{2}}\sqrt{c^{2}+cb+b^{2}}\geq ac-ab-cb-2b^{2}$$

$$(2\sqrt{(a^{2}+ab+b^{2})(c^{2}+cb+b^{2})})^{2}\geq (ac-ab-cb-2b^{2})^{2}$$

$$4b^{4}+4a^{2}c^{2}+4b^{2}c^{2}+4a^{2}b^{2}+4ab^{2}c+4a^{2}bc+4abc^{2}+4b^{3}c+4ab^{3}\geq 4b^{4}+a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+a^{2}c^{2}-2a^{2}bc-2abc^{2}-2ab^{2}c+4b^{3}c+4ab^{3}$$

$$3a^{2}c^{2}+3a^{2}b^{2}+3b^{2}c^{2}+6ab^{2}c+6a^{2}bc+6abc^{2}\geq 0 (:3)$$

$$a^{2}c^{2}+a^{2}b^{2}+b^{2}c^{2}+2ab^{2}c+2a^{2}bc+2abc^{2}\geq 0$$

$$(ab+bc+ac)^{2}\geq 0$$

Данное тождество доказывает, что исходное неравенство может выполнятся так же и при отрицательных числах *a,b* и *c.*

В процессе доказательства мне удалось доказать, что:

$$\sqrt{a^{2}-2ab\*cosα+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-2cb\*cosβ+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}-2ac\*cos⁡(α+β)+c^{2}} $$

Доказательство:

Пусть $m=\sqrt{a^{2}-2ab\*cosα+b^{2}};a,b,m-стороны треугольника$

*α*

*a*

*b*

$$\left(a\^b\right)=\arccos(α)$$

*m*

Пусть $n=\sqrt{c^{2}-2cb\*cosβ+b^{2}}; b,c,n-стороны треугольника$

*β*

*c*

*b*

$$\left(b\^c\right)=\arccos(β)$$

*n*

Пусть $k=\sqrt{a^{2}-2ac\*cos⁡(α+β)+c^{2}}; a,c,k-стороны треугольника$

*(α+β)*

*a*

*c*

$$\left(a\^c\right)=\arccos((α+β))$$

*k*

Совместив 3 изображения в одно, получим:

*β*

*α*

*c*

*a*

*k*

*m*

$m+n\geq k$

*n*

А значит,

$$\sqrt{a^{2}-2ab cosα+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-2cb cosβ+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}-2ac cos⁡(α+β)+c^{2}}$$

Данное неравенство так же выполняется при любых значениях *a,b* и *c*:

$$\sqrt{a^{2}-2ab+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-2cb+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}-2ac+c^{2}}$$

$$\left|a-b\right|+\left|c-b\right|\geq \left|a-c\right|$$

$$\left|a-b\right|=\left\{\begin{array}{c}a-b ;a\geq b\\b-a ;a<b\end{array}\right.$$

$$\left|c-b\right|=\left\{\begin{array}{c}c-b ;c\geq b\\b-c ;c<b\end{array}\right.$$

$$\left|a-c\right|=\left\{\begin{array}{c}a-c ;a\geq c\\c-a ;a<c\end{array}\right.$$

|  |  |
| --- | --- |
| 1 случай. $a\leq b\leq c$ | 4 случай. $b\leq a\leq c$ |
| $b-a+c-b\geq c-a$ $0\geq 0$ (верно) | $$a-b+c-b\geq a-c$$$b\leq c$ (верно по условию случая) |
| 2 случай. $a\leq c\leq b$ | 5 случай. $b\leq c\leq a$ |
| $$b-a+b-c\geq c-a$$$b\geq c$ (верно по условию случая) | $$a-b+c-b\geq a-c$$$b\leq c$ (верно по условию случая) |
| 3 случай. $c\leq a\leq b$ | 6 случай. $с\leq b\leq a$ |
| $$b-a+b-c\geq a-c$$$b\geq a$ (верно по условию случая) | $$a-b+b-c\geq a-c$$$0\geq 0$ (верно) |

$$\sqrt{a^{2}-2ab sinα+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-2cb sinβ+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}+2ac cos⁡(α+β)+c^{2}}$$

Заменив синусы и косинус по формулам приведения приведём данное неравенство к общему виду:

$$\sqrt{a^{2}-2ab cos⁡(α-\frac{π}{2})+b^{2}}+\sqrt{c^{2}-2cb cos⁡(β-\frac{π}{2})+b^{2}}\geq \sqrt{a^{2}-2ac\*cos⁡(α+β-π)+c^{2}}$$

Доказательство данного неравенства схоже с рассмотренным ранее (стр.10)

**Получение олимпиадных неравенств и их доказательство**

В продолжении своего исследования я составил несколько неравенств, кото-рые можно без труда решить, используя результаты нашей исследовательской работы.

1. $\sqrt{a\_{1}^{2}+a\_{1}b\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{c\_{1}^{2}+c\_{1}b\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}+a\_{2}b\_{2}+b\_{2}^{2}}+\sqrt{c\_{2}^{2}+c\_{2}b\_{2}+b\_{2}^{2}}+\sqrt{a\_{3}^{2}+a\_{3}b\_{3}+b\_{3}^{2}}+\sqrt{c\_{3}^{2}+c\_{3}b\_{3}+b\_{3}^{2}}+…+\sqrt{a\_{n}^{2}+a\_{n}b\_{n}+b\_{n}^{2}}+\sqrt{c\_{n}^{2}+c\_{n}b\_{n}+b\_{n}^{2}}\geq \sqrt{a\_{1}^{2}+a\_{1}c\_{1}+c\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}+a\_{2}c\_{2}+c\_{2}^{2}}+\sqrt{a\_{3}^{2}+a\_{3}c\_{3}+c\_{3}^{2}}+\cdots +\sqrt{a\_{n}^{2}+a\_{n}c\_{n}+c\_{n}^{2}} $
2. $\sqrt{a\_{1}^{2}+a\_{1}b\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{c\_{1}^{2}+c\_{1}b\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}+a\_{2}b\_{2}+b\_{2}^{2}}+\sqrt{c\_{2}^{2}+c\_{2}b\_{2}+b\_{2}^{2}}+\sqrt{a\_{3}^{2}+a\_{3}b\_{3}+b\_{3}^{2}}+\sqrt{c\_{3}^{2}+c\_{3}b\_{3}+b\_{3}^{2}}+…+\sqrt{a\_{n}^{2}+a\_{n}b\_{n}+b\_{n}^{2}}+\sqrt{c\_{n}^{2}+c\_{n}b\_{n}+b\_{n}^{2}}\geq \sqrt{a\_{1}^{2}-a\_{1}c\_{1}+c\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}-a\_{2}c\_{2}+c\_{2}^{2}}+\sqrt{a\_{3}^{2}-a\_{3}c\_{3}+c\_{3}^{2}}+\cdots +\sqrt{a\_{n}^{2}-a\_{n}c\_{n}+c\_{n}^{2}} $
3. $\sqrt{a\_{1}^{2}-2a\_{1}b\_{1} cosα\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{c\_{1}^{2}-2c\_{1}b\_{1}cosβ\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}-2a\_{2}b\_{2} cosα\_{2}+b\_{2}^{2}}+\sqrt{c\_{2}^{2}-2c\_{2}b\_{2}cosβ\_{2}+b\_{2}^{2}}+…+\sqrt{a\_{n}^{2}-2a\_{n}b\_{n} cosα\_{n}+b\_{n}^{2}}+\sqrt{c\_{n}^{2}-2c\_{n}b\_{n}cosβ\_{n}+b\_{n}^{2}}\geq \sqrt{a\_{1}^{2}-2a\_{1}c\_{1}\cos(\left(α\_{1}+β\_{1}\right))+c\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}-2a\_{2}c\_{2}\cos(\left(α\_{2}+β\_{2}\right))+c\_{2}^{2}}+…+\sqrt{a\_{n}^{2}-2a\_{n}c\_{n}cos⁡(α\_{n}+β\_{n})+c\_{n}^{2}}$
4. $\sqrt{a\_{1}^{2}-2a\_{1}b\_{1} sinα\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{c\_{1}^{2}-2c\_{1}b\_{1}sinβ\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}-2a\_{2}b\_{2} sinα\_{2}+b\_{2}^{2}}+\sqrt{c\_{2}^{2}-2c\_{2}b\_{2}sinβ\_{2}+b\_{2}^{2}}+…+\sqrt{a\_{n}^{2}-2a\_{n}b\_{n} sinα\_{n}+b\_{n}^{2}}+\sqrt{c\_{n}^{2}-2c\_{n}b\_{n}sinβ\_{n}+b\_{n}^{2}}\geq \sqrt{a\_{1}^{2}+2a\_{1}c\_{1}\cos(\left(α\_{1}+β\_{1}\right))+c\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}+2a\_{2}c\_{2}\cos(\left(α\_{2}+β\_{2}\right))+c\_{2}^{2}}+…+\sqrt{a\_{n}^{2}+2a\_{n}c\_{n}cos⁡(α\_{n}+β\_{n})+c\_{n}^{2}}$
5. $\sqrt{a\_{1}^{2}-2a\_{1}b\_{1} sinα\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{c\_{1}^{2}-2c\_{1}b\_{1}cosα\_{1}+b\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}-2a\_{2}b\_{2} sinα\_{2}+b\_{2}^{2}}+\sqrt{c\_{2}^{2}-2c\_{2}b\_{2}cosα\_{2}+b\_{2}^{2}}+…+\sqrt{a\_{n}^{2}-2a\_{n}b\_{n} sinα\_{n}+b\_{n}^{2}}+\sqrt{c\_{n}^{2}-2c\_{n}b\_{n}cosα\_{n}+b\_{n}^{2}}\geq \sqrt{a\_{1}^{2}+c\_{1}^{2}}+\sqrt{a\_{2}^{2}+c\_{2}^{2}}+…+\sqrt{a\_{n}^{2}+c\_{n}^{2}}$

**Заключение**

Таким образом, мне удалось реализовать все цели и задачи, стоящие передо мной в процессе исследования, а именно:

1. Удалось показать, что исходное неравенство имеет несколько способов доказательства.
2. Удалось доказать, что исходное неравенство выполняется не только при положительных, но и при отрицательных числах *a, b, c.*
3. Удалось выяснить условие равенства левой и правой части исходного неравенства.
4. Используя результаты исследования, удалось составить задачи на доказательство неравенств повышенного уровня сложности.

**Список литературы**

1. Балаян Э.Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ: 9-11 классы.
2. Саакян С.М. и др. Задачи по алгебре и началам анализа. Пособие для учащихся 10-11 кл. общеобразоват. учреждений.
3. Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗы (с решениями). Книга 1. Алгебра.
4. Титаренко А.М. Математика:9-11 классы: 6000 задач и примеров.