**XXII Российская научная конференция школьников «Открытие»**

**Секция математики**

**Олимпиадная задача на максимум**

***Исследовательская работа***

Зорин Тимофей Леонидович, обучающийся11 класса

МБОУ “Кожильская СОШ” д.Кожило Балезинского района Удмуртской республики

**Научный руководитель -**  Касимов Рифхат Шамилович,

педагог дополнительного образования Балезинской СОШ №2, заслуженный учитель УР

**г. Ярославль, 2019 г.**

**Оглавление**

[Введение 3](#_Toc534722264)

[Основная часть 4](#_Toc534722265)

[Исследование задачи для “дальнего нижнего угла ворот” 5](#_Toc534722266)

[Исследование задачи для “ближнего нижнего угла ворот” 8](#_Toc534722267)

[Исследование задачи для “дальнего верхнего угла ворот” 10](#_Toc534722268)

[Исследование задачи для “ближнего верхнего угла ворот” 12](#_Toc534722269)

[Заключение 14](#_Toc534722270)

[Список использованных источников и литературы 14](#_Toc534722271)

# Введение

В 2010 году на олимпиаде “Ломоносов” предлагалась задача по механике следующего содержания: ”Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда ворота будут видны под максимально возможным углом. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен насести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 72 м, а ширина ворот равна 8м?” Необходимо учесть, что ответ получился х = $\sqrt{ab}$ = $\sqrt{20\*12}$ $≈15,5$ м. Любопытно, что примерно в то же время в австралийском журнале по математике была опубликована статья, в которой с разных точек зрения рассматривается задача поиска наиболее выгодных точек для удара по воротам в австралийском футболе.

В российском научно-теоретическом и методическом журнале “Математика в школе” в 2015 году была опубликована статья господина А.С.Зеленского, который продемонстрировал в ней 5 различных способов решения данной задачи. Затем в 2016 году в том же журнале за номером 5 появилась статья господина С.И.Калинина с Вятского Государственного технического университета города Кирова, в которой он предлагает ещё 3 других способа решения этой интересной технической задачи. Удивительно, но факт остаётся фактом, никто из них не догадался усовершенствовать исследование этой ситуации. Дело в том, что суть игры в футбол заключается не в том, чтобы попасть в створ ворот, а в том, чтобы забить гол. Понятия “попасть в створ ворот” и “забить гол” могли бы быть одинаковыми или означали бы одно и то же понятие, если бы играли без вратаря. Но в настоящем реальном футболе такого не происходит: в воротах стоит вратарь, который может отбивать мячи, летящие в ворота. Из этого следует, что вероятность забить гол в ворота повышается, если футболист попадает мячём не вообще в створ ворот, а в определённую её часть, находящуюся вдали от вратаря. К таким частям ворот можно отнести:

1. два нижних угла ворот
2. два верхних угла ворот.

Исходя из выше изложенного, перед нами была поставлена цель переформулировать эту задачу, сделав её более практичной, приближенной к реалиям футбольной жизни. Вторая цель – решение переформулированной задачи и оформление полученных результатов в виде исследовательской работы.

# Основная часть

Основную часть исследования мы начнём с нашей переформулированной задачи. Так как углов у ворот всего 4 (два нижних и два верхних), то у нас получится не одна новая задача, а 4 новых задач.

1. Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда под максимально большим углом будет виден дальний от бегущего к воротам футболиста нижний угол ворот. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен нанести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 68 м, а ширина ворот равна 7,32 м?
2. Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда под максимально большим углом будет виден ближний от бегущего к воротам футболиста нижний угол ворот. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен нанести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 68 м, а ширина ворот равна 7,32 м?
3. Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда под максимально большим углом будет виден дальний от бегущего к воротам футболиста верхний угол ворот. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен нанести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 68 м, а ширина ворот равна 7,32 м?
4. Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда под максимально большим углом будет виден ближний от бегущего к воротам футболиста верхний угол ворот. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен нанести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 68 м, а ширина ворот равна 7,32 м?

**Исследование задачи для “дальнего нижнего угла ворот”**

Начнём с первой задачи. Для этого сделаем чертёж соответствующий условию задачи и введем следующие обозначения DC = x, A1С = a, AM=m.

Решим задачу координатно - векторным способом.

Возьмем в качестве начала координат точку А1. Тогда имеем: т. А1(0;0), т. С(а;0), т. А(0;х), т. М(m;x).

 $\vec{СА}${-a;x} $\vec{CM}${m-a;x}

Найдем значение скалярного произведения векторов $\vec{СА}$ и $\vec{CM}$.

$\vec{СА}$\*$\vec{CM} $= |$\vec{СА}$|\*|$\vec{CM}$|\*cosα, где |$\vec{СА}$| и |$\vec{CM}$| длины векторов $\vec{СА} и$ $\vec{CM}$ соответственно, $\vec{СА}$\*$\vec{CM}$ – скалярное произведение данных векторов, α – угол между векторами $\vec{СА}$ и $\vec{CM}$. Скалярное произведение $\vec{СА}$\*$\vec{CM}$ находится, как сумма произведений одноимённых координат перемножаемых векторов. Поэтому $\vec{СА}$\*$\vec{CM} $= a2-am+x2. Длины векторов находим, как корень квадратный из суммы квадратов координат соответствующего вектора, тогда $\vec{|СА}$|\*$\vec{|CM|} $=$ \sqrt{x^{2}+a^{2}}$\*$\sqrt{(m-a)^{2}+x^{2}}$

Тогда cos α =$ \frac{a^{2}-am+x^{2}}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}\*\sqrt{(m-a)^{2}+x^{2}}}$

Введём под общий квадратный корень числитель и знаменатель данной функции и проведём соответствующие преобразования, раскрывая скобки в числителе и знаменателе. Эти преобразования выглядят следующим образом: cos α =$ \sqrt{\frac{(a^{2}-am+x^{2})^{2}}{(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})}}$

Числитель:$(a^{2}-am+x^{2})^{2} $= x4+a4+2x2a2-2ax2m-2a3m+a2m2

Знаменатель:$(x^{2}+a^{2})\left(x^{2}+\left(m-a\right)^{2}\right) $= x4+a4+2x2a2-2ax2m-2a3m+a2m2+x2m2

Тогда функция примет вид cos α =$ \sqrt{\frac{x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}}{x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}+x^{2}m^{2}}}$

Так как мы ищем наибольшее значение угла α, расположенного в 1 четверти, а функция cos α в 1 четверти убывает, то мы должны найти при каком условии или при каком значении х cos α примет наименьшее значение. Для дальнейшего исследования выделим целую часть подкоренной дроби путём почленного деления числителя на знаменатель:

$x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}$ $ x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}$+$x^{2}m^{2}$

$x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}$+x2m2

1

-x2m2

Из этого следует, что cos α =$ \sqrt{1-\frac{x^{2}m^{2}}{(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})}}$

От сюда следует, что достаточно исследовать функцию

$f\left(x\right)=\frac{x^{2}m^{2}}{(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})}$

Очевидно, что cos α примет наименьшее значение, если $f\left(x\right)$ примет наибольшее значение. Осталось найти при каком значении х функция $f\left(x\right)$ примет наибольшее значение и записать окончательный результат.

Введём рассмотрение 2 вектора $\vec{а}${x;a} и $\vec{b}${m-a;x}.

$\vec{а}$\*$\vec{b} $= |$\vec{а}$|\*|$\vec{b}$|\*cosα

x(m-a)+ax =$ \sqrt{x^{2}+a^{2}}$\*$\sqrt{(m-a)^{2}+x^{2}}$\*cosα

cos α =$ \frac{x(m-a)+ax}{ \sqrt{x^{2}+a^{2}}\*\sqrt{(m-a)^{2}+x^{2}}}$

cos2 α =$ \frac{x^{2}m^{2}}{(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})}$

cos2 α≤1

$x^{2}m^{2}$≤$(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})$

$f\left(x\right)\leq \frac{x^{2}m^{2}}{x^{2}m^{2}}$≤1 ⇒ функция $f\left(x\right)$ ограничена сверху числом 1, значит имеет наибольшее значение равное 1. Выясним при каком условии выполняется равенство $f\left(x\right) $= 1.

cos2 α = 1

cos α = 1, так как α – угол 1 четверти

α = 0$°$

Так как α = 0$°$, то $\vec{а}$ и $\vec{b} $коллинеарные. А у коллинеарных векторов координаты пропорциональны.

$\frac{x}{|m-a|}$ =$ \frac{a}{x}$

х =$ \frac{a(\left|m-a\right|)}{x}$

x2 = a(|m-a|)

x =$ \sqrt{a(\left|m-a\right|)}$

Возьмем m = 1 м, тогда a = 21,32 м. Тогда х =$ \sqrt{21,32(\left|1-21,32\right|)}$ = 20,8 м.

**Исследование задачи для “ближнего нижнего угла ворот”**

M1C = a, DC = x, MB = m.

Возьмем в качестве начала координат точку M1. Тогда имеем: т. M1(0;0), т. С(а;0), т. B(m;х), т. М(0;x).

 $\vec{СB}${m-a;x} $\vec{CM}${-a;x}

$\vec{СB}$\*$\vec{CM} $= |$\vec{СB}$|\*|$\vec{CM}$|\*cosα

a2-am+x2 =$ \sqrt{x^{2}+a^{2}}$\*$\sqrt{(m-a)^{2}+x^{2}}$\*cosα

cos α =$ \sqrt{\frac{(a^{2}-am+x^{2})^{2}}{(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})}}$

Числитель:$ (a^{2}-am+x^{2})^{2 }$= x4+a4+2x2a2-2ax2m-2a3m+a2m2

Знаменатель:$(x^{2}+a^{2})\left(x^{2}+\left(m-a\right)^{2}\right) $= x4+a4+2x2a2-2ax2m-2a3m+a2m2+x2m2

cos α =$ \sqrt{\frac{x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}}{x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}+x^{2}m^{2}}}$

$x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}$ $ x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}$+$x^{2}m^{2}$

$x^{4}+a^{4}+2x^{2}a^{2}-2ax^{2}m-2a^{3}m+a^{2}m^{2}$+x2m2

1

-x2m2

cos α =$ \sqrt{1-\frac{x^{2}m^{2}}{(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})}}$

$f\left(x\right)=\frac{x^{2}m^{2}}{(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})}$

Введём рассмотрение 2 вектора $\vec{а}${x;a} и $\vec{b}${m-a;x}.

$\vec{а}$\*$\vec{b} $= |$\vec{а}$|\*|$\vec{b}$|\*cosα

x(m-a)+ax =$ \sqrt{x^{2}+a^{2}}$\*$\sqrt{(m-a)^{2}+x^{2}}$\*cosα

cos α =$ \frac{x(m-a)+ax}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}\*\sqrt{(m-a)^{2}+x^{2}}}$

cos2 α =$ \frac{x^{2}m^{2}}{(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})}$

cos2α≤1

$x^{2}m^{2}$≤$(x^{2}+a^{2})(x^{2}+\left(m-a\right)^{2})$

$f\left(x\right)\leq \frac{x^{2}m^{2}}{x^{2}m^{2}} $≤1 ⇒ функция $f\left(x\right)$ ограничена сверху числом 1, значит имеет наибольшее значение равное 1. Выясним при каком условии выполняется равенство $f\left(x\right) $= 1.

cos2 α = 1

cos α = 1, так как α – угол 1 четверти

α = 0$°$

Так как α = 0$°$, то $\vec{а}$ и $\vec{b }$ коллинеарные. А у коллинеарных векторов координаты пропорциональны.

$\frac{x}{|m-a|}$ =$ \frac{a}{x}$

х =$ \frac{a(\left|m-a\right|)}{x}$

x2 = a(|m-a|)

x =$ \sqrt{a(\left|m-a\right|)}$

Возьмем m = 1 м, тогда a = 11,34 м. Тогда х =$ \sqrt{11,34(\left|1-11,34\right|)}$=10,83м.

**Исследование задачи для “дальнего верхнего угла ворот”**

AD = a, DC = x, AM = m, AA1 = h

Возьмем в качестве начала координат точку A2. Тогда имеем: т. A2(0;0;0), т. С(а;0;0), т. A(0;х;h), т. М(m;x;h).

 $\vec{СA}${-a;x;h} $\vec{CM}${m-a;x;h}

$\vec{СA}$\*$\vec{CM}$ = |$\vec{СA}$|\*|$\vec{CM}$|\*cosα

a2-am+x2+h2 = $\sqrt{x^{2}+a^{2}+h^{2}}$\*$\sqrt{(m-a)^{2}+x^{2}+h^{2}}$\*cosα

cos α =$ \sqrt{\frac{(a^{2}-am+x^{2}+h^{2})^{2}}{(x^{2}+a^{2}+h^{2})(x^{2}+h^{2}+\left(m-a\right)^{2})}}$

Пусть x2+h2 = t, t>0, тогда

Числитель:$ (a^{2}-am+t)^{2} $= a4+a2m2+t2-2a3m+2a2t-2amt

Знаменатель:$ \left(t+a^{2}\right)\left(t+\left(m-a\right)^{2}\right) $= a4+a2m2+t2-2a3m+2a2t-2amt+m2t

сos α =$ \sqrt{\frac{a^{4}+a^{2}m^{2}+t^{2}-2a^{3}m+2a^{2}t-2amt}{a^{4}+a^{2}m^{2}+t^{2}-2a^{3}m+2a^{2}t-2amt+m^{2}t}}$

a4+a2m2+t2-2a3m+2a2t-2amt $ a^{4}+a^{2}m^{2}+t^{2}-2a^{3}m+2a^{2}t-2amt+m^{2}t$

a4+a2m2+t2-2a3m+2a2t-2amt+m2t

1

-m2t

сos α = $\sqrt{1-\frac{m^{2}t}{(t+a^{2})(t+\left(m-a\right)^{2})}}$

Обратная замена t=x2+h2

сos α =$ \sqrt{1-\frac{m^{2}(x^{2}+h^{2})}{(x^{2}+h^{2}+a^{2})(x^{2}+h^{2}+\left(m-a\right)^{2})}}$

$f\left(x\right)=\frac{m^{2}(x^{2}+h^{2})}{(x^{2}+h^{2}+a^{2})(x^{2}+h^{2}+\left(m-a\right)^{2})}$

x2+h2= ( x2+h2)-2xh. Пусть (x+h)2=t2, xh=v, тогда x2+h2=t2-2v

$f\left(t\right)=\frac{m^{2}(t^{2}-2v)}{(t^{2}-2v+a^{2})(t^{2}-2v+\left(m-a\right)^{2})}$

$φ\left(t\right)=\frac{1}{f\left(t\right)}=\frac{(t^{2}-2v+a^{2})(t^{2}-2v+\left(m-a\right)^{2})}{m^{2}(t^{2}-2v)} $ Пусть t2-2v = p

$φ\left(t\right)=\frac{\left(p+a^{2}\right)\left(p+\left(m-a\right)^{2}\right)}{m^{2}p}=\frac{p^{2}+p\left(a-m\right)^{2}+pa^{2}+a^{2}\left(a-m\right)^{2}}{m^{2}p}=$

$=\frac{p^{2}+p((a-m)^{2}+a^{2})+a^{2}(a-m)^{2}}{m^{2}p}$ = $\frac{p}{m^{2}}(p+(a-m)^{2}+a^{2}+\frac{a^{2}(a-m)^{2}}{p})$

p+$\frac{a^{2}(a-m)^{2}}{p}\geq 2\sqrt{p\frac{a^{2}(a-m)^{2}}{p}}$ = 2a(a-m)

$φ\left(t\right) $≥$ \frac{2a\left(a-m\right)+(a-m)^{2}+a^{2}}{m^{2}}$ Имеем наименьшее значение, если p =$ \frac{a^{2}(a-m)^{2}}{p}$

p2 = $a^{2}\left(a-m\right)^{2}$

p = a(a-m)

Обратная замена p = t2-2v

t2-2v = a(a-m)

Обратная замена t2-2v = x2+h2

x2+h2 = a(a-m)

x=$\sqrt{a\left(a-m\right)-h^{2}}$

Возьмем m=1м, h=2,44м тогда a=21,32м. Тогда x=$\sqrt{21,32\left(21,32-1\right)-2,44^{2}}$=$\sqrt{427,2688}$=20,7м.

**Исследование задачи для “ближнего верхнего угла ворот”**

M2C = b, DC = x, BM = m, BB1 = h

Возьмем в качестве начала координат точку M2. Тогда имеем: т. M2(0;0;0), т. С(b;0;0), т. B(m;х;h), т. М(0;x;h).

 $\vec{СB}${m-b;x;h} $\vec{CM}${-b;x;h}

$\vec{СB}$\*$\vec{CM} $= |$\vec{СB}$|\*|$\vec{CM}$|\*cosα

b2-bm+x2+h2 =$ \sqrt{x^{2}+b^{2}+h^{2}}$\*$\sqrt{m^{2}-2mb+b^{2}+x^{2}+h^{2}}$\*cosα

Пусть t=b2+x2+h2

cos α =$ \sqrt{\frac{(t-bm)^{2}}{t(t+m^{2}-2bm)}}$

cos α =$\sqrt{\frac{t^{2}-2tbm+b^{2}m^{2}}{t^{2}+tm^{2}-2tbm}}$ = $\sqrt{1+\frac{m^{2}(b^{2}-t)}{t^{2}-2tbm+tm^{2}}}$

Так как в интервале от 0° до 90° функция cos α убывает, то мы должны найти условие при котором cos α будет минимальным. Тогда функция $f\left(t\right)$

Должна быть минимальной, значит обратная функция $φ\left(t\right)$ должна быть максимальной. Для нахождения максимального её значения используем первую производную.

$f\left(t\right) $= $\frac{m^{2}b^{2}-m^{2}t}{t^{2}-2tbm+tm^{2}}$

$φ\left(t\right)=\frac{1}{f\left(t\right)}$ =$ \frac{t^{2}-2tbm+tm^{2}}{m^{2}b^{2}-m^{2}t}$

$φ’\left(t\right)$ =$ \frac{\left(2t-2mb+m^{2}\right)\left(m^{2}b^{2}-m^{2}t\right)-m^{2}(t^{2}-2tbm+tm^{2})}{(m^{2}b^{2}-m^{2}t)^{2}}$ = 0

2m2b2t-2m3b3+m4b2-2m2t2+2m3bt-m4t-m2t2-2tm3b+m4t = 0

2m2b2t-2m3b3+m4b2-m2t2 = 0

2m2b2(t-mb)+m2((mb)2-t2) = 0

(t-mb)( 2m2b2-m2(t+mb) = 0

t = mb – не подходит, так как 11,342+х2+2,442 = 11,342 или

2m2b2-m2t-m3b = 0

2b2-t-mb = 0

t = 2b2-mb, исследуем т. t = 2b2-mb или после замены b2+x2+h2 = 2b2 –mb:

1)она является точкой минимума

2)она является точкой максимума.

Для этого находим значение первой производной в точке левее, чем исследуемая, например t =$ \frac{b^{2}}{2}$. Подстановкой убеждаемся, что в этой точке производная имеет знак “+”. Теперь находим знак производной в точке, лежащей правее исследуемой, например t = 2b2. Путём подстановки убеждаемся, что производная в этой точке имеет знак “-“. Таким образом, при переходе через исследуемую точку производной $φ’\left(t\right)$ функции $φ\left(t\right)$ меняет знак с “+” на “-“. Значит, исследуемая точка является точкой максимума.

b2+x2+h2 = 2b2 –mb

x2 = b2-mb-h2

x = $\sqrt{b(b-m)-h^{2}}$

Возьмем m = 1м, h = 2,44м, тогда b = 11,34м. Тогда

х = $\sqrt{21,32\left(21,32-1\right)-2,44^{2}}$ = $\sqrt{111,302}$ = 10,5м.

Заключение

Таким образом, удалось реализовать все цели и задачи, которые были поставлены перед нами в процессе выполнения исследовательской работы.

1. Во-первых, нам удалось переформулировать известную задачу про футболиста и сделать её более приближённой к футбольной жизни.
2. Во-вторых, решить эту задачу средствами и методами алгебры, геометрии и математического анализа для 4 разных случаев:
3. Для дальнего нижнего угла ворот
4. Для ближнего нижнего угла ворот
5. Для дальнего верхнего угла ворот
6. Для ближнего верхнего угла ворот
7. В-третьих, полученные результаты оформлены соответствующим образом в виде исследовательской работы.

Список использованных источников и литературы

1) Научно теоретический и методический журнал “Математика в школе “ № 10 за 2015 год стр. 59-64

2) Научно теоретический и методический журнал “Математика в школе “ № 5 за 2016 год стр. 74-76