**XXII Российская научная конференция школьников «Открытие»**

**Секция математики**

**Олимпиадная задача на максимум**

***Исследовательская работа***

Зорин Тимофей Леонидович, обучающийся11 класса

МБОУ “Кожильская СОШ” д.Кожило Балезинского района Удмуртской республики

**Научный руководитель -**  Касимов Рифхат Шамилович,

педагог дополнительного образования Балезинской СОШ №2, заслуженный учитель УР

**г. Ярославль, 2019 г.**

**Оглавление**

[Введение 3](#_Toc534722264)

[Основная часть 4](#_Toc534722265)

[Исследование задачи для “дальнего нижнего угла ворот” 5](#_Toc534722266)

[Исследование задачи для “ближнего нижнего угла ворот” 8](#_Toc534722267)

[Исследование задачи для “дальнего верхнего угла ворот” 10](#_Toc534722268)

[Исследование задачи для “ближнего верхнего угла ворот” 12](#_Toc534722269)

[Заключение 14](#_Toc534722270)

[Список использованных источников и литературы 14](#_Toc534722271)

# Введение

В 2010 году на олимпиаде “Ломоносов” предлагалась задача по механике следующего содержания: ”Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда ворота будут видны под максимально возможным углом. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен насести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 72 м, а ширина ворот равна 8м?” Необходимо учесть, что ответ получился х = = м. Любопытно, что примерно в то же время в австралийском журнале по математике была опубликована статья, в которой с разных точек зрения рассматривается задача поиска наиболее выгодных точек для удара по воротам в австралийском футболе.

В российском научно-теоретическом и методическом журнале “Математика в школе” в 2015 году была опубликована статья господина А.С.Зеленского, который продемонстрировал в ней 5 различных способов решения данной задачи. Затем в 2016 году в том же журнале за номером 5 появилась статья господина С.И.Калинина с Вятского Государственного технического университета города Кирова, в которой он предлагает ещё 3 других способа решения этой интересной технической задачи. Удивительно, но факт остаётся фактом, никто из них не догадался усовершенствовать исследование этой ситуации. Дело в том, что суть игры в футбол заключается не в том, чтобы попасть в створ ворот, а в том, чтобы забить гол. Понятия “попасть в створ ворот” и “забить гол” могли бы быть одинаковыми или означали бы одно и то же понятие, если бы играли без вратаря. Но в настоящем реальном футболе такого не происходит: в воротах стоит вратарь, который может отбивать мячи, летящие в ворота. Из этого следует, что вероятность забить гол в ворота повышается, если футболист попадает мячём не вообще в створ ворот, а в определённую её часть, находящуюся вдали от вратаря. К таким частям ворот можно отнести:

1. два нижних угла ворот
2. два верхних угла ворот.

Исходя из выше изложенного, перед нами была поставлена цель переформулировать эту задачу, сделав её более практичной, приближенной к реалиям футбольной жизни. Вторая цель – решение переформулированной задачи и оформление полученных результатов в виде исследовательской работы.

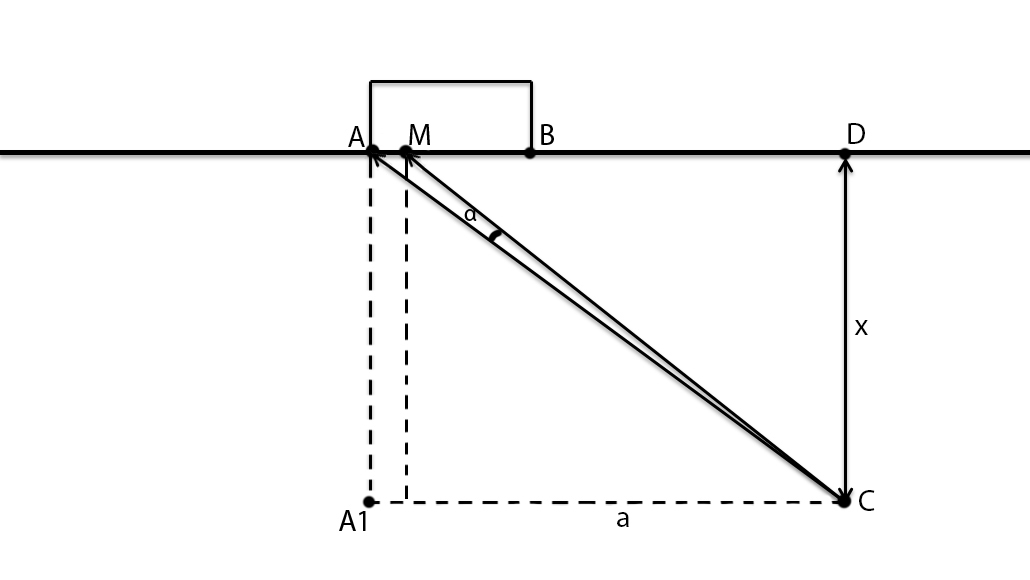
# Основная часть

Основную часть исследования мы начнём с нашей переформулированной задачи. Так как углов у ворот всего 4 (два нижних и два верхних), то у нас получится не одна новая задача, а 4 новых задач.

1. Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда под максимально большим углом будет виден дальний от бегущего к воротам футболиста нижний угол ворот. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен нанести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 68 м, а ширина ворот равна 7,32 м?
2. Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда под максимально большим углом будет виден ближний от бегущего к воротам футболиста нижний угол ворот. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен нанести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 68 м, а ширина ворот равна 7,32 м?
3. Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда под максимально большим углом будет виден дальний от бегущего к воротам футболиста верхний угол ворот. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен нанести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 68 м, а ширина ворот равна 7,32 м?
4. Футболист движется к воротам параллельно боковой линии прямоугольного поля на расстоянии 20 м от неё. Он хочет нанести удар по воротам в тот момент, когда под максимально большим углом будет виден ближний от бегущего к воротам футболиста верхний угол ворот. На каком расстоянии от лицевой линии (это сторона прямоугольника, в середине которой расположены ворота) он должен нанести удар, если известно, что ширина этого футбольного поля равна 68 м, а ширина ворот равна 7,32 м?

**Исследование задачи для “дальнего нижнего угла ворот”**

Начнём с первой задачи. Для этого сделаем чертёж соответствующий условию задачи и введем следующие обозначения DC = x, A1С = a, AM=m.



Решим задачу координатно - векторным способом.

Возьмем в качестве начала координат точку А1. Тогда имеем: т. А1(0;0), т. С(а;0), т. А(0;х), т. М(m;x).

{-a;x} {m-a;x}

Найдем значение скалярного произведения векторов и .

\*= ||\*||\*cosα, где || и || длины векторов соответственно, \* – скалярное произведение данных векторов, α – угол между векторами и . Скалярное произведение \* находится, как сумма произведений одноимённых координат перемножаемых векторов. Поэтому \*= a2-am+x2. Длины векторов находим, как корень квадратный из суммы квадратов координат соответствующего вектора, тогда |\*=\*

Тогда cos α =

Введём под общий квадратный корень числитель и знаменатель данной функции и проведём соответствующие преобразования, раскрывая скобки в числителе и знаменателе. Эти преобразования выглядят следующим образом: cos α =

Числитель:= x4+a4+2x2a2-2ax2m-2a3m+a2m2

Знаменатель:= x4+a4+2x2a2-2ax2m-2a3m+a2m2+x2m2

Тогда функция примет вид cos α =

Так как мы ищем наибольшее значение угла α, расположенного в 1 четверти, а функция cos α в 1 четверти убывает, то мы должны найти при каком условии или при каком значении х cos α примет наименьшее значение. Для дальнейшего исследования выделим целую часть подкоренной дроби путём почленного деления числителя на знаменатель:

+

+x2m2

1

-x2m2

Из этого следует, что cos α =

От сюда следует, что достаточно исследовать функцию

Очевидно, что cos α примет наименьшее значение, если примет наибольшее значение. Осталось найти при каком значении х функция примет наибольшее значение и записать окончательный результат.

Введём рассмотрение 2 вектора {x;a} и {m-a;x}.

\*= ||\*||\*cosα

x(m-a)+ax =\*\*cosα

cos α =

cos2 α =

cos2 α≤1

≤

≤1 ⇒ функция ограничена сверху числом 1, значит имеет наибольшее значение равное 1. Выясним при каком условии выполняется равенство = 1.

cos2 α = 1

cos α = 1, так как α – угол 1 четверти

α = 0

Так как α = 0, то и коллинеарные. А у коллинеарных векторов координаты пропорциональны.

=

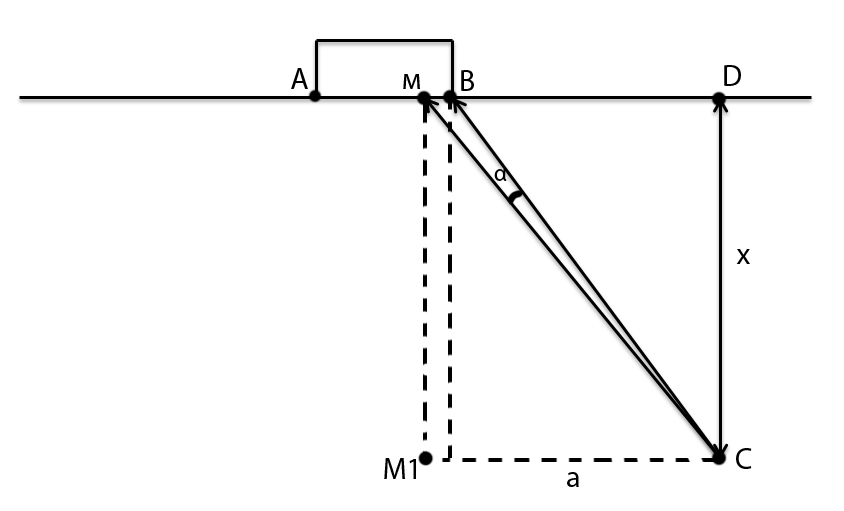
х =

x2 = a(|m-a|)

x =

Возьмем m = 1 м, тогда a = 21,32 м. Тогда х = = 20,8 м.

**Исследование задачи для “ближнего нижнего угла ворот”**



M1C = a, DC = x, MB = m.

Возьмем в качестве начала координат точку M1. Тогда имеем: т. M1(0;0), т. С(а;0), т. B(m;х), т. М(0;x).

{m-a;x} {-a;x}

\*= ||\*||\*cosα

a2-am+x2 =\*\*cosα

cos α =

Числитель:= x4+a4+2x2a2-2ax2m-2a3m+a2m2

Знаменатель:= x4+a4+2x2a2-2ax2m-2a3m+a2m2+x2m2

cos α =

+

+x2m2

1

-x2m2

cos α =

Введём рассмотрение 2 вектора {x;a} и {m-a;x}.

\*= ||\*||\*cosα

x(m-a)+ax =\*\*cosα

cos α =

cos2 α =

cos2α≤1

≤

≤1 ⇒ функция ограничена сверху числом 1, значит имеет наибольшее значение равное 1. Выясним при каком условии выполняется равенство = 1.

cos2 α = 1

cos α = 1, так как α – угол 1 четверти

α = 0

Так как α = 0, то и коллинеарные. А у коллинеарных векторов координаты пропорциональны.

=

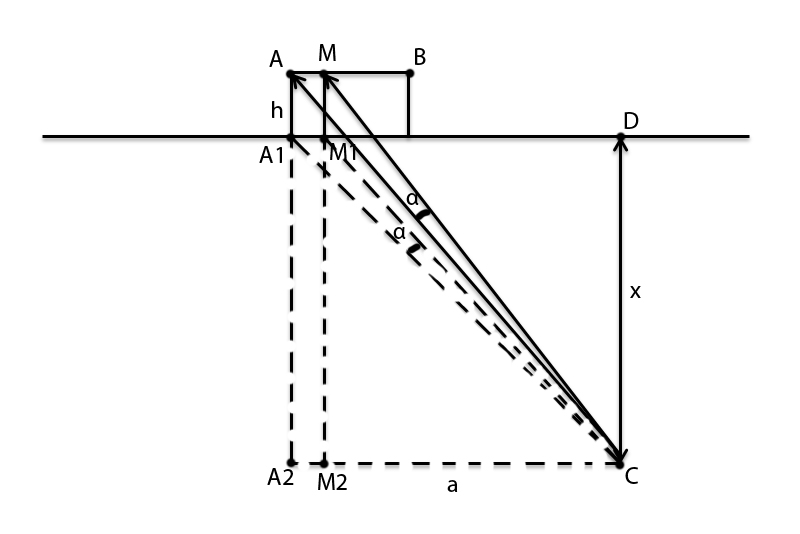
х =

x2 = a(|m-a|)

x =

Возьмем m = 1 м, тогда a = 11,34 м. Тогда х ==10,83м.

**Исследование задачи для “дальнего верхнего угла ворот”**



AD = a, DC = x, AM = m, AA1 = h

Возьмем в качестве начала координат точку A2. Тогда имеем: т. A2(0;0;0), т. С(а;0;0), т. A(0;х;h), т. М(m;x;h).

{-a;x;h} {m-a;x;h}

\* = ||\*||\*cosα

a2-am+x2+h2 = \*\*cosα

cos α =

Пусть x2+h2 = t, t>0, тогда

Числитель:= a4+a2m2+t2-2a3m+2a2t-2amt

Знаменатель:= a4+a2m2+t2-2a3m+2a2t-2amt+m2t

сos α =

a4+a2m2+t2-2a3m+2a2t-2amt

a4+a2m2+t2-2a3m+2a2t-2amt+m2t

1

-m2t

сos α =

Обратная замена t=x2+h2

сos α =

x2+h2= ( x2+h2)-2xh. Пусть (x+h)2=t2, xh=v, тогда x2+h2=t2-2v

Пусть t2-2v = p

=

p+ = 2a(a-m)

≥ Имеем наименьшее значение, если p =

p2 =

p = a(a-m)

Обратная замена p = t2-2v

t2-2v = a(a-m)

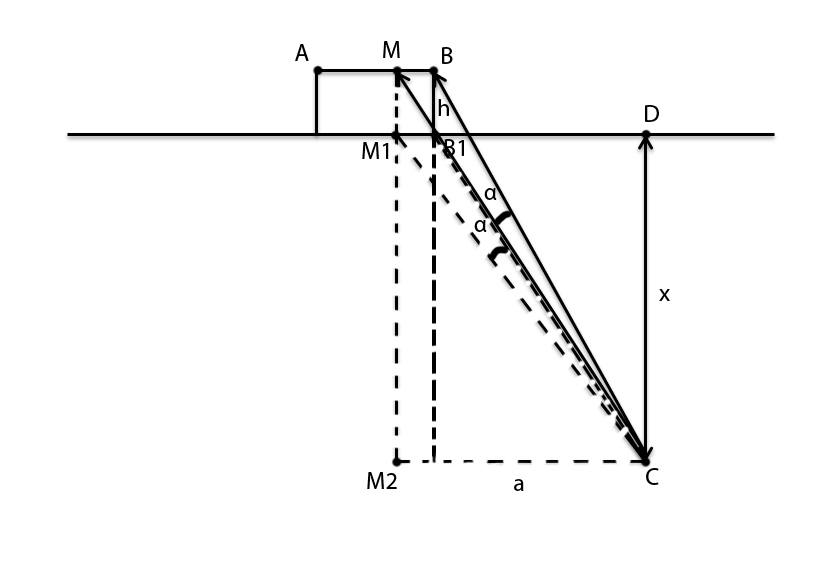
Обратная замена t2-2v = x2+h2

x2+h2 = a(a-m)

x=

Возьмем m=1м, h=2,44м тогда a=21,32м. Тогда x===20,7м.

**Исследование задачи для “ближнего верхнего угла ворот”**



M2C = b, DC = x, BM = m, BB1 = h

Возьмем в качестве начала координат точку M2. Тогда имеем: т. M2(0;0;0), т. С(b;0;0), т. B(m;х;h), т. М(0;x;h).

{m-b;x;h} {-b;x;h}

\*= ||\*||\*cosα

b2-bm+x2+h2 =\*\*cosα

Пусть t=b2+x2+h2

cos α =

cos α = =

Так как в интервале от 0° до 90° функция cos α убывает, то мы должны найти условие при котором cos α будет минимальным. Тогда функция

Должна быть минимальной, значит обратная функция должна быть максимальной. Для нахождения максимального её значения используем первую производную.

=

=

= = 0

2m2b2t-2m3b3+m4b2-2m2t2+2m3bt-m4t-m2t2-2tm3b+m4t = 0

2m2b2t-2m3b3+m4b2-m2t2 = 0

2m2b2(t-mb)+m2((mb)2-t2) = 0

(t-mb)( 2m2b2-m2(t+mb) = 0

t = mb – не подходит, так как 11,342+х2+2,442 = 11,342 или

2m2b2-m2t-m3b = 0

2b2-t-mb = 0

t = 2b2-mb, исследуем т. t = 2b2-mb или после замены b2+x2+h2 = 2b2 –mb:

1)она является точкой минимума

2)она является точкой максимума.

Для этого находим значение первой производной в точке левее, чем исследуемая, например t =. Подстановкой убеждаемся, что в этой точке производная имеет знак “+”. Теперь находим знак производной в точке, лежащей правее исследуемой, например t = 2b2. Путём подстановки убеждаемся, что производная в этой точке имеет знак “-“. Таким образом, при переходе через исследуемую точку производной функции меняет знак с “+” на “-“. Значит, исследуемая точка является точкой максимума.

b2+x2+h2 = 2b2 –mb

x2 = b2-mb-h2

x =

Возьмем m = 1м, h = 2,44м, тогда b = 11,34м. Тогда

х = = = 10,5м.

Заключение

Таким образом, удалось реализовать все цели и задачи, которые были поставлены перед нами в процессе выполнения исследовательской работы.

1. Во-первых, нам удалось переформулировать известную задачу про футболиста и сделать её более приближённой к футбольной жизни.
2. Во-вторых, решить эту задачу средствами и методами алгебры, геометрии и математического анализа для 4 разных случаев:
3. Для дальнего нижнего угла ворот
4. Для ближнего нижнего угла ворот
5. Для дальнего верхнего угла ворот
6. Для ближнего верхнего угла ворот
7. В-третьих, полученные результаты оформлены соответствующим образом в виде исследовательской работы.

Список использованных источников и литературы

1) Научно теоретический и методический журнал “Математика в школе “ № 10 за 2015 год стр. 59-64

2) Научно теоретический и методический журнал “Математика в школе “ № 5 за 2016 год стр. 74-76