1. Введение

В книге [1, гл. 4] рассматривается конструкция, приводящая к неравенствам специального вида, которые называются неравенствами Ки Фана. Кратко воспроизведём эту конструкцию.

Пусть числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат полуинтервалу $\left(0, \frac{1}{2}\right]$. Тогда построим новые числа $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ по формулам $x'_i = 1 - x_i$, где i — номер элемента. Для каждой из групп можно построить их арифметико-геометрические средние. Обозначим через $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ арифметическое и геометрическое средние соответственно для первой группы чисел. Для краткости будем обозначать их также $A(x_i)$, $G(x_i)$. Аналогично для второй группы чисел арифметико-геометрические средние будем обозначать, как $A(x'_i)$ и $G(x'_i)$. Взвешенным средним арифметическим чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно называется число

$$\tilde{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Для краткости будем обозначать его также $\tilde{A}(x_i)$ для первой группы чисел и $\tilde{A}(x'_i)$ для второй группы чисел соответственно. Взвешенным средним геометрическим чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно называется число

$$\tilde{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}}.$$

Для краткости будем обозначать его также $\tilde{G}(x_i)$ для первой группы чисел и $\tilde{G}(x'_i)$ для второй группы чисел соответственно.

В этих обозначениях в книге [1, гл. 4] доказано, что имеют место неравенства, связывающие арифметико-геометрические и взвешенные арифметико-геометрические средние:

$$\frac{G(x_i)}{G(x'_i)} \leqslant \frac{A(x_i)}{A(x'_i)},$$
$$A(x'_i) - A(x_i) \leqslant G(x'_i) - G(x_i),$$
$$\frac{\tilde{G}(x_i)}{\tilde{G}(x'_i)} \leqslant \frac{\tilde{A}(x_i)}{\tilde{A}(x'_i)},$$
$$\tilde{A}(x'_i) - \tilde{A}(x_i) \leqslant \tilde{G}(x'_i) - \tilde{G}(x_i).$$

Они называются неравенствами Ки Фана, мультипликативным, аддитивным, взвешенным мультипликативным и взвешенным аддитивным соответственно.

Равенство, задающее числа x'_i, можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x_i + x'_i}{2} = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что точка $\frac{1}{2}$ является серединой отрезка с концами x_i и x'_i. Другими словами, точки x'_i получаются из точек x_i путём симметрии с центром $\frac{1}{2}$.

В данной работе будут изучены симметрии с <u>*другими*</u> *центрами. Мы докажем, что в этом случае также справедливы неравенства, аналогичные неравенствам Ки Фана. Тем самым классические неравенства Ки Фана будут обобщены.*

2. Вспомогательные утверждения

В книге [2, с. 399] упоминается определение однородной функции. Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящую от n переменных, называют однородной степени α, если для любого положительного числа λ выполняется равенство

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

На основе этого определения докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Среднее арифметическое является однородной функцией степени 1.*

Доказательство. Прямыми вычислениями получаем, что

$$A(kx_i) = \frac{kx_1 + kx_2 + \cdots + kx_n}{n} = k\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = kA(x_i).$$

Таким образом, мы доказали, что функция $A(x_i)$ является однородной.

Лемма 2. *Среднее геометрическое является однородной функцией степени 1.*

Доказательство. Прямыми вычислениями получаем, что

$$G(kx_i) = \sqrt[n]{(kx_1)(kx_2)\cdots(kx_n)} = \sqrt[n]{k^n x_1 x_2 \cdots x_n} = k\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = kG(x_i).$$

Таким образом, мы доказали, что функция $G(x_i)$ является однородной.

Лемма 3. *Взвешенное среднее арифметическое является однородной функцией степени 1.*

Доказательство. Прямыми вычислениями получаем, что

$$\tilde{A}(kx_i) = \frac{kp_1x_1 + kp_2x_2 + \cdots + kp_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = k\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = k\tilde{A}(x_i).$$

Таким образом, мы доказали, что функция $\tilde{A}(x_i)$ является однородной.

Лемма 4. *Взвешенное среднее геометрическое является однородной функцией степени 1.*

Доказательство. Прямыми вычислениями получаем, что

$$\tilde{G}(kx_i) = ((kx_1)^{p_1}(kx_2)^{p_2}\cdots(kx_n)^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}} =$$

$$= ((k^{p_1+p_2+\cdots+p_n})(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}))^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}} =$$

$$= k\,(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}} = k\tilde{G}(x_i).$$

Таким образом, мы доказали, что функция $\tilde{G}(x_i)$ является однородной.

3. Основная теорема

Теорема. *Пусть $x_i \in (0, \lambda]$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть числа x_i' симметричны числам x_i относительно центра λ. Тогда имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{G(x_i)}{G(x_i')} \leqslant \frac{A(x_i)}{A(x_i')}, \tag{1}$$

$$A(x_i') - A(x_i) \leqslant G(x_i') - G(x_i), \tag{2}$$

$$\frac{\tilde{G}(x_i)}{\tilde{G}(x_i')} \leqslant \frac{\tilde{A}(x_i)}{\tilde{A}(x_i')}, \tag{3}$$

$$\tilde{A}(x_i') - \tilde{A}(x_i) \leqslant \tilde{G}(x_i') - \tilde{G}(x_i). \tag{4}$$

Назовём их обобщёнными неравенствами Ки Фана, мультипликативным, аддитивным, взвешенным мультипликативным и взвешенным аддитивным соответственно.

Доказательство. Поскольку числа x_i и x_i' симметричны относительно точки λ, имеет место равенство $\frac{x_i'+x_i}{2} = \lambda$. Другими словами $x_i' = 2\lambda - x_i$.

Рассмотрим гомотетию $h(x)$ вещественной прямой с центром в начале координат и коэффициентом k, равным $\frac{1}{2\lambda}$. Применим её к числам x_i и x_i' из обеих наших групп чисел. Обозначая образы этих чисел через y_i и y_i' соответственно, получим следующее равенства:

$$\begin{cases} y_i = h(x_i) = \dfrac{x_i}{2\lambda}, \\ y_i' = h(x_i') = \dfrac{x_i'}{2\lambda} = \dfrac{2\lambda - x_i}{2\lambda} = 1 - \dfrac{x_i}{2\lambda} = 1 - y_i, \\ h(\lambda) = \lambda \cdot \dfrac{1}{2\lambda} = 0{,}5. \end{cases} \tag{5}$$

Опираясь на эти равенства, мы можем сказать, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ принадлежат полуинтервалу $(0, \frac{1}{2}]$, следовательно для них выполняются классические неравенства Ки Фана.

Докажем неравенство (1). Запишем неравенство Ки Фана для чисел y_i и y_i', полученных из равенств (5):

$$\frac{G(y_i)}{G(y_i')} \leqslant \frac{A(y_i)}{A(y_i')}.$$

По формулам (5) получаем, что

$$\frac{G\left(\frac{x_i}{2\lambda}\right)}{G\left(\frac{x_i'}{2\lambda}\right)} \leqslant \frac{A\left(\frac{x_i}{2\lambda}\right)}{A\left(\frac{x_i'}{2\lambda}\right)}.$$

Из лемм мы знаем, что арифметико-геометрические средние однородны, следовательно последнее неравенство можно переписать так:

$$\frac{G(x_i)/2\lambda}{G(x_i')/2\lambda} \leqslant \frac{A(x_i)/2\lambda}{A(x_i')/2\lambda}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на 2λ:

$$\frac{G(x_i)}{G(x_i')} \leqslant \frac{A(x_i)}{A(x_i')}.$$

Таким образом, мы доказали мультиплкативное неравенство Ки Фана для произвольных чисел из промежутка $(0, \lambda]$.

Докажем неравенство (2). Запишем неравенство Ки Фана для чисел y_i и y_i', полученных из равенств (5):

$$A(y_i') - A(y_i) \leqslant G(y_i') - G(y_i).$$

По формулам (5) получаем, что

$$A\left(\frac{x_i'}{2\lambda}\right) - A\left(\frac{x_i}{2\lambda}\right) \leqslant G\left(\frac{x_i'}{2\lambda}\right) - G\left(\frac{x_i}{2\lambda}\right).$$

Из лемм мы знаем, что арифметико-геометрические средние однородны, следовательно последнее неравенство можно переписать так:

$$\frac{1}{2\lambda}A(x_i') - \frac{1}{2\lambda}A(x_i) \leqslant \frac{1}{2\lambda}G(x_i') - \frac{1}{2\lambda}G(x_i).$$

Зная, что $\frac{1}{2\lambda}$ строго больше 0, мы можем разделить на это число обе части неравенства:

$$A(x_i') - A(x_i) \leqslant G(x_i') - G(x_i).$$

Таким образом, мы доказали аддитивное неравенство Ки Фана для произвольных чисел из промежутка $(0, \lambda]$.

Докажем неравенство (3). Запишем неравенство Ки Фана для чисел y_i и y_i', полученных из равенств (5):

$$\frac{\tilde{G}(y_i)}{\tilde{G}(y_i')} \leqslant \frac{\tilde{A}(y_i)}{\tilde{A}(y_i')}.$$

По формулам (5) получаем, что

$$\frac{\tilde{G}\Big(\dfrac{x_i}{2\lambda}\Big)}{\tilde{G}\Big(\dfrac{x_i'}{2\lambda}\Big)} \leqslant \frac{\tilde{A}\Big(\dfrac{x_i}{2\lambda}\Big)}{\tilde{A}\Big(\dfrac{x_i'}{2\lambda}\Big)}.$$

Из лемм мы знаем, что арифметико-геометрические средние однородны, следовательно последнее неравенство можно переписать так:

$$\frac{\tilde{G}(x_i)/2\lambda}{\tilde{G}(x_i')/2\lambda} \leqslant \frac{\tilde{A}(x_i)/2\lambda}{\tilde{A}(x_i')/2\lambda}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на 2λ:

$$\frac{\tilde{G}(x_i)}{\tilde{G}(x_i')} \leqslant \frac{\tilde{A}(x_i)}{\tilde{A}(x_i')}.$$

Таким образом, мы доказали взвешенное мультиплкативное неравенство Ки Фана для произвольных чисел из промежутка $(0, \lambda]$.

Докажем неравенство (4). Запишем неравенство Ки Фана для чисел y_i и y_i', полученных из равенств (5):

$$\tilde{A}(y_i') - \tilde{A}(y_i) \leqslant \tilde{G}(y_i') - \tilde{G}(y_i).$$

По формулам (5) получаем, что

$$\tilde{A}\Big(\frac{x_i'}{2\lambda}\Big) - \tilde{A}\Big(\frac{x_i}{2\lambda}\Big) \leqslant \tilde{G}\Big(\frac{x_i'}{2\lambda}\Big) - \tilde{G}\Big(\frac{x_i}{2\lambda}\Big).$$

Из лемм мы знаем, что арифметико-геометрические средние однородны, следовательно последнее неравенство можно переписать так:

$$\frac{1}{2\lambda}\tilde{A}(x_i') - \frac{1}{2\lambda}\tilde{A}(x_i) \leqslant \frac{1}{2\lambda}\tilde{G}(x_i') - \frac{1}{2\lambda}\tilde{G}(x_i).$$

Зная, что $\frac{1}{2\lambda}$ строго больше 0, мы можем разделить на это число обе части неравенства:

$$\tilde{A}(x_i') - \tilde{A}(x_i) \leqslant \tilde{G}(x_i') - \tilde{G}(x_i).$$

Таким образом, мы доказали аддитивное неравенство Ки Фана для произвольных чисел из промежутка $(0, \lambda]$.

Тем самым, нами доказаны обобщённые неравенства Ки Фана.

Замечание 1. Покажем, что из аддитивного неравенства Ки Фана следует мультипликативное неравенство Ки Фана.

Из неравенства Коши следует, что величины, обратные среднему арифметическому и среднему геометрическому для чисел вида x_i', будут связаны между собой следующим тождеством:

$$\frac{1}{A(x_i')} \leqslant \frac{1}{G(x_i')}. \tag{6}$$

Перемножая неравенства (2) и (6) получим, что:

$$1 - \frac{A(x_i)}{A(x'_i)} \leqslant 1 - \frac{G(x_i)}{G(x'_i)}.$$

Уменьшив на 1 обе части этого выражения, получим, что

$$-\frac{A(x_i)}{A(x'_i)} \leqslant -\frac{G(x_i)}{G(x'_i)}.$$

Из предыдущего тождества, следует что

$$\frac{G(x_i)}{G(x'_i)} \leqslant \frac{A(x_i)}{A(x'_i)}.$$

Таким образом, мы доказали мультиплкативное неравенство Ки Фана через аддитивное.

Замечание 2. Покажем, что из взвешенного аддитивного неравенства Ки Фана следует взвешенное мультипликативное неравенство Ки Фана.

В книге [1, гл. 3] доказано, что имеет место неравенство, связывающее взвешенные арифметико-геометрические средние для чисел вида x'_i:

$$\tilde{G}(x'_i) \leqslant \tilde{A}(x'_i). \tag{7}$$

Из тождества (7) следует, что величины, обратные взвешеному среднему арифметическому и среднему геометрическому будут связаны между собой тождеством:

$$\frac{1}{\tilde{A}(x'_i)} \leqslant \frac{1}{\tilde{G}(x'_i)}. \tag{8}$$

Перемножая неравенства (4) и (8) получим, что:

$$1 - \frac{\tilde{A}(x_i)}{\tilde{A}(x'_i)} \leqslant 1 - \frac{\tilde{G}(x_i)}{\tilde{G}(x'_i)}.$$

Уменьшив на 1 обе части этого выражения, получим, что

$$-\frac{\tilde{A}(x_i)}{\tilde{A}(x'_i)} \leqslant -\frac{\tilde{G}(x_i)}{\tilde{G}(x'_i)}.$$

Из предыдущего тождества, следует что

$$\frac{\tilde{G}(x_i)}{\tilde{G}(x'_i)} \leqslant \frac{\tilde{A}(x_i)}{\tilde{A}(x'_i)}.$$

Таким образом, мы доказали взвешенное мультиплкативное неравенство Ки Фана через взвешенное аддитивное.

4. Некоторые приложения неравенств Ки Фана

Подобно неравенству Коши, неравенства Ки Фана имеют многочисленные приложения. Достаточно подробно эти приложения описаны в книге [1, гл. 5]. Приведём две задачи, которые показывают возможность нетривиальных приложений.

Задача 1. Докажите неравенство

$$\frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x\sqrt{1-\cos x}} \leqslant \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x + 2\sin^2\frac{x}{2}}, \quad x \in \Big[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\Big). \tag{9}$$

При каких значениях x оно может обращаться в равенство?

Решение. Прежде всего преобразуем неравенство в другую, равносильную, форму, которая будет более удобна для дальнейшего анализа. С этой целью обе части неравенства домножим на $\cos x$, и в левой части неравенства внесём $\sin x$ под знак корня. При этом получим, что

$$\frac{\cos x\sqrt{\cos x}}{\sqrt{(1-\cos^2 x)(1-\cos x)}} \leqslant \frac{2\cos x\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x + 2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

В левой части полученного неравенства внесём $\cos x$ под знак корня. Прямыми вычислениями получим, что

$$\frac{\sqrt{\cos^2 x\cos x}}{\sqrt{(1-\cos^2 x)(1-\cos x)}} \leqslant \frac{2\cos x\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x + 2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Так как при $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ величины $\cos x$ и $\cos^2 x$ принимают значения из промежутка $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, то к левой части неравенства можно применить мультипликативное неравенство Ки Фана. Получим, что

$$\frac{\sqrt{\cos^2 x\cos x}}{\sqrt{(1-\cos^2 x)(1-\cos x)}} \leqslant \frac{\cos^2 x + \cos x}{(1-\cos^2 x)+(1-\cos x)}.$$

На промежутке $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x < \sin x$. Поэтому для числителя правой части справедлива оценка

$$\cos^2 x + \cos x \leqslant 2\cos x\cos^2\frac{x}{2}.$$

Знаменатель правой части равен $\sin^2 x + 2\sin^2\frac{x}{2}$ в силу обычных тригонометрических формул. Окончательно получим, что

$$\frac{\sqrt{\cos^2 x\cos x}}{\sqrt{(1-\cos^2 x)(1-\cos x)}} \leqslant \frac{2\cos x\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x + 2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Нужное показано. Очевидно, равенство в тождестве (9) может достигаться лишь тогда, когда $\cos x = \cos^2 x$. Но последнее при $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ никогда не выполняется. Следовательно, ни при каких значениях x неравенство (9) в равенство не обращается.

Задача 2. Доказать, что для углов α, β, γ остроугольного треугольника справедливо неравенство

$$1 + \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} \leqslant \frac{3}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + cos^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Решение. Так как по условию треугольник остроугольный, то значения $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ попадают в интервал $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ и, следовательно, значения $\sin^2\frac{\alpha}{2}, \sin^2\frac{\beta}{2}, \sin^2\frac{\gamma}{2}$ лежат в промежутке $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим величину $\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$ и оценим её сверху, применяя неравенство Ки Фана. Имеем:

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt[3]{\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)+\left(1-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{3-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{3}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}} - 1.$$

Отсюда следует нужное тождество. Заметим, в доказанном неравенстве равенство будет достигаться только тогда, когда треугольник будет равносторонним.

5. Литература

1. Калинин, С.И. Средние величины степенного типа [Текст].—Киров: Изд-во ВГГУ, 2005.— 327 с.
2. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального вычисления. Т. 1. [Текст].—М.: Наука, 1966.— 607 с.