XXI Российская научная конференция школьников «Открытие»

Секция математики

**ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ТОЧКЕ ТРЕУГОЛЬНИКА**

##### ***Исследовательская работа***

**Осина Ирина Владимировна,** обучающаяся 10 класса

МБОУ «Лицей №24 им. Героя Советского Союза А.В. Корявина» Сергиево-Посадского района

**Научный руководитель** –

**Морозов Дмитрий Валерьевич,**

учитель информатики МБОУ «Лицей №24 им. Героя Советского Союза А.В. Корявина» Сергиево-Посадского района

Ярославль, 2018

**Оглавление**

[**Введение** 3](#_Toc506395610)

[**Постановка задачи. Доказательство теоремы** 4](#_Toc506395611)

[**Заключение** 10](#_Toc506395612)

[**Список использованных источников и литературы** 11](#_Toc506395613)

# **Введение**

 Треугольник – одна из основных геометрических фигур и обладает огромным количеством интересных, удивительных свойств [1]. И, по всей видимости, далеко не все свойства еще открыты.

 Среди основных элементов треугольника выделяют несколько замечательных точек, изучаемых в школьной программе, и огромное количество особых точек, выходящих за ее рамки.

 **Цель работы** – доказать существование новой точки треугольника, которая получается в интересной конструкции треугольника, связанной с тремя вписанными в сегменты окружностями, и описать ее свойства.

Решаются следующие **задачи**:

1. Формулировка теоремы о существовании новой точки треугольника и ее основном свойстве
2. Доказательство теоремы
3. Исследование свойств обнаруженной новой точки треугольника

# **Постановка задачи. Доказательство теоремы**

Рассмотрим произвольный Δ*ABC*. Пусть $a, b, c$ – длины сторон треугольника, $\left(Ω, R\right)$ – описанная окружность, т. *O* – ее центр, $\left(ω,r\right)$ – вписанная окружность, т. *I* – ее центр. Точки $A\_{1}$,$B\_{1}$, $C\_{1}$ – точки касания вписанной окружностью сторон треугольника (рис. 1).

 Каждая сторона делит круг, ограниченный описанной около треугольника окружностью, на два сегмента. Выберем те из них, что не содержат третьих вершин. В каждый такой сегмент впишем по окружности, которые касаются стороны треугольника в точках $A\_{1}$,$B\_{1}$, $C\_{1}$ соответственно, а также касаются описанной окружности – обозначим эти точки соответственно $A\_{2}$, $B\_{2}$, $C\_{2}$ (рис. 2). Для каждого сегмента (при однозначном выборе точек касания сторон треугольника) такие окружности единственны. Обозначим эти окружности $\left(ω\_{a},r\_{a}\right)$,$\left(ω\_{b},r\_{b}\right)$ и $\left(ω\_{c},r\_{c}\right)$.



Рис. 1. Иллюстрация к задаче.



Рис. 2. Взаимное расположение пяти окружностей.

 **Теорема.**Прямые $AA\_{2}$,$BB\_{2}$, $CC\_{2}$ пересекаются в одной точке, которая лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

 **Доказательство.**

 а) Утверждение о том, что прямые $AA\_{2}$,$BB\_{2}$, $CC\_{2}$ пересекаются в одной точке*E*, следует из свойствизоциркулярного преобразования, предложенного в [2].

 Суть изоциркулярного преобразования состоит в следующем. Рассмотрим произвольную точку *Z*, расположенную внутри Δ*ABC*. Прямые *AZ*, *BZ*, *CZ*пересекают описанную около данного треугольникаокружность в точках$A\_{2}$,$B\_{2}$, $C\_{2}$. В сегмент, отсекаемый стороной *BC,* дуга которого не содержит т. *A*, впишем окружность, которая касается стороны*BC* в точке $A\_{1}$. Аналогично определим точки $B\_{1}$ и$C\_{1}$ (рис. 3). Прямые $AA\_{1}$,$BB\_{1}$, $CC\_{1}$пересекаются в одной точке $Z'$, которую мы будем называть изоциркулярным образом точки $Z$ [2]. И наоборот, по известной точке $Z'$можно определить единственную точку$Z$.



Рис. 3. Изоциркулярное преобразование.

 Точка $E$ является, таким образом, прообразом точки Жергона$Gr$ [1, 3]. Тут же укажем, что барицентрические координаты т. *E*$\left(\frac{a}{\left(p-a\right)},\frac{b}{\left(p-b\right)},\frac{c}{\left(p-c\right)}\right)$, так как барицентрические координаты при изоциркулярном преобразовании связаны простым соотношением$Z\left(x,y,z\right)\rightarrow Z'\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right)$, а координаты т. *Gr*$\left(\frac{1}{p-a},\frac{1}{p-b},\frac{1}{p-c}\right)$.

 б) Для доказательства того, что данная точка *E*принадлежит прямой *OI*, воспользуемся уравнением этой прямой в барицентрических координатах.

Такое уравнение имеет вид: $\left(y\_{1}z\_{2}-y\_{2}z\_{1}\right)x+\left(x\_{1}z\_{2}-x\_{2}z\_{1}\right)y+\left(x\_{1}y\_{2}-x\_{2}y\_{1}\right)z=0$, где $\left(x\_{1}, y\_{1}, z\_{1}\right)$ и $\left(x\_{2}, y\_{2}, z\_{2}\right)$ – координаты двух точек данной прямой [2,3]. Еслиточка принадлежит прямой, то при подстановке ее координат в уравнение получим верное равенство. Координаты точек *O* и *I* известны: *I*$\left(a,b,c\right)$, *O*$\left(a^{2}\left(b^{2}+c^{2}-a^{2}\right), b^{2}\left(a^{2}+c^{2}-b^{2}\right),c^{2}\left(a^{2}+b^{2}-c^{2}\right),\right)$.Подставим в уравнение координаты точки *E*$\left(\frac{a}{\left(p-a\right)},\frac{b}{\left(p-b\right)},\frac{c}{\left(p-c\right)}\right)$:

 $\left(bc^{2}\left(a^{2}+b^{2}-c^{2}\right)-cb^{2}\left(a^{2}+c^{2}-b^{2}\right)\right)\frac{a}{\left(p-a\right)}+\left(ac^{2}\left(a^{2}+b^{2}-c^{2}\right)-ca^{2}\left(b^{2}+c^{2}-a^{2}\right)\right)\frac{b}{\left(p-b\right)}+\left(ab^{2}\left(a^{2}+c^{2}-b^{2}\right)-ba^{2}\left(b^{2}+c^{2}-a^{2}\right)\right)\frac{c}{\left(p-c\right)}=0$

 После преобразований получаем, что они удовлетворяют данному уравнению.

Ч.т.д.

 Одним из основных является вопрос о расположении точки *E* на прямой *OI* относительно центров вписанной и описанной окружностей. Как показывают построения, точки *O* и *E* всегда расположены по разные стороны от точки *I*, но обоснование этого наблюдения еще не получено. При этом точка *E* всегда лежит внутри треугольника, также, как и центр вписанной окружности. Действительно, для получения т. *E* необходимо провести прямые, обязательно пересекающие стороны треугольника.

 Вопрос о расстоянии *IE*является одним из главных, и довольно сложен, его предполагается подробно изучить в дальнейшем, а в настоящей работе мною рассмотрен только частный случай – равнобедренный треугольник. В силу свойств подобия достаточно рассмотреть равнобедренные треугольники с одинаковым основанием $a$ = 1. Тогда единственным параметром, от которого будут зависеть исследуемые величины, будет угол при вершине *B*$β$.

Рис. 4. Зависимости $R\left(β\right), r\left(β\right), d\left(β\right)$ и$IE\left(β\right)$.

Для равнобедренного треугольника с основанием $a$ и углом при верщине $β$ радиусы описанной и вписанной окружностей определяются по известным формулам: $R=\frac{a}{2sinβ}$, $r=\frac{a}{2}tg\left(\frac{π-β}{4}\right)$, а расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей вычисляется по формуле Эйлера, $d^{2}=R^{2}-2Rr$.

Длина отрезка *IE*, так как формула для ее нахождения мною еще не выведена, определялась с использованием программного продукта GeoGebra. И данные значения являются приближенными, но, дают возможность представить общую картину.

На рисунке 4 показаны зависимости от угла $β$ радиусов описанной $R$ и вписанной $r$окружностей, расстояния между ними $d$ и длины отрезка *IE*. Можно видеть, что для всех значений $βIE \leq OI$, причем равенство $IE= OI=0$ достигается в правильном треугольнике.

 Исследования продолжаются

**Определение радиусов окружностей, вписанных в сегменты**

Мне удалось составить уравнение для определения радиусов окружностей, вписанных в сегменты. Для определенности рассмотрим радиус $r\_{b}.$ Идея состоит в следующем: $∆LOB\_{2} \~∆B\_{1}O\_{b}B\_{2}$ (по двум углам, рис. 5). Из подобия данных треугольников следует соотношение: $\frac{r\_{b}}{R}= \frac{B\_{1}B\_{2}}{B\_{1}B\_{2}+B\_{1}L}$.$B\_{1}L$ можно найти из прямоугольного треугольника $LO\_{H}B\_{1}$:$B\_{1}L=\sqrt{LO\_{H}^{2}+O\_{H}B\_{1}^{2}}$. Выразим $O\_{H}B\_{1} и LO\_{H}. O\_{H}B\_{1}=\frac{b}{2}-\left(p-c\right)$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$ и $CB\_{1}=p-c$. $LO\_{H}=R+OO\_{H}$, где $OO\_{H}=\sqrt{R^{2}-\frac{b^{2}}{4}}$.$B\_{1}B\_{2}$ найдем из прямоугольного треугольника $O\_{b}B\_{1}T$.$S\_{O\_{b}B\_{1}T}=\frac{1}{2}B\_{1}B\_{H}∙TO\_{b}=\frac{1}{2}r\_{b}∙TB\_{1}$, причем $B\_{1}B\_{H}=\frac{1}{2}B\_{1}B\_{2}$. Выполнив преобразования, получим, что $B\_{1}B\_{2}=\frac{2r\_{b}∙TB\_{1}}{\sqrt{r\_{b}^{2}+TB\_{1}^{2}}}$, где $TB\_{1}=\frac{CB\_{1}\left(b-CB\_{1}\right)}{b-2CB\_{1}}. $Подставив эти выражения в пропорцию, выведенную из подобия двух треугольников, и проделав многочисленные преобразования, я получила следующее квадратное уравнение:

$\left(1-4\frac{B\_{1}T^{2}}{B\_{1}L^{2}}\right)r\_{b}²+8R\frac{B\_{1}T^{2}}{B\_{1}L^{2}}r\_{b}+B\_{1}T^{2}-4R\frac{B\_{1}T^{2}}{B\_{1}L^{2}}=0$.

Рис. 5. К определению радиуса$ r\_{b}$

 В дальнейшем необходимо рассмотреть несколько вопросов, связанных с данной задачей:

1. Доказать, что прямые $AA\_{2}$,$BB\_{2}$, $CC\_{2}$ проходят через основания высот треугольника касаний.

# **Заключение**

 В ходе выполнения мною работы были достигнуты следующие результаты:

1. Найдена новая точка треугольника – описан метод ее построения.
2. Сформулирована и доказана теорема о существовании данной точки и ее основном свойстве.
3. Сформулированы задачи для дальнейшего исследования.

# **Список использованных источников и литературы**

1. *Коксетер Г., Грейтцер С.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.
2. *Мякишев А.Г.* Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002. – 312 с.
3. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.