XXI Российская научная конференция школьников «Открытие»

Секция математики

**ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ТОЧКЕ ТРЕУГОЛЬНИКА**

##### ***Исследовательская работа***

**Осина Ирина Владимировна,** обучающаяся 10 класса

МБОУ «Лицей №24 им. Героя Советского Союза А.В. Корявина» Сергиево-Посадского района

**Научный руководитель** –

**Морозов Дмитрий Валерьевич,**

учитель информатики МБОУ «Лицей №24 им. Героя Советского Союза А.В. Корявина» Сергиево-Посадского района

Ярославль, 2018

**Оглавление**

[**Введение** 3](#_Toc506395610)

[**Постановка задачи. Доказательство теоремы** 4](#_Toc506395611)

[**Заключение** 10](#_Toc506395612)

[**Список использованных источников и литературы** 11](#_Toc506395613)

# **Введение**

Треугольник – одна из основных геометрических фигур и обладает огромным количеством интересных, удивительных свойств [1]. И, по всей видимости, далеко не все свойства еще открыты.

Среди основных элементов треугольника выделяют несколько замечательных точек, изучаемых в школьной программе, и огромное количество особых точек, выходящих за ее рамки.

**Цель работы** – доказать существование новой точки треугольника, которая получается в интересной конструкции треугольника, связанной с тремя вписанными в сегменты окружностями, и описать ее свойства.

Решаются следующие **задачи**:

1. Формулировка теоремы о существовании новой точки треугольника и ее основном свойстве
2. Доказательство теоремы
3. Исследование свойств обнаруженной новой точки треугольника

# **Постановка задачи. Доказательство теоремы**

Рассмотрим произвольный Δ*ABC*. Пусть – длины сторон треугольника, – описанная окружность, т. *O* – ее центр, – вписанная окружность, т. *I* – ее центр. Точки ,, – точки касания вписанной окружностью сторон треугольника (рис. 1).

Каждая сторона делит круг, ограниченный описанной около треугольника окружностью, на два сегмента. Выберем те из них, что не содержат третьих вершин. В каждый такой сегмент впишем по окружности, которые касаются стороны треугольника в точках ,, соответственно, а также касаются описанной окружности – обозначим эти точки соответственно , , (рис. 2). Для каждого сегмента (при однозначном выборе точек касания сторон треугольника) такие окружности единственны. Обозначим эти окружности , и .

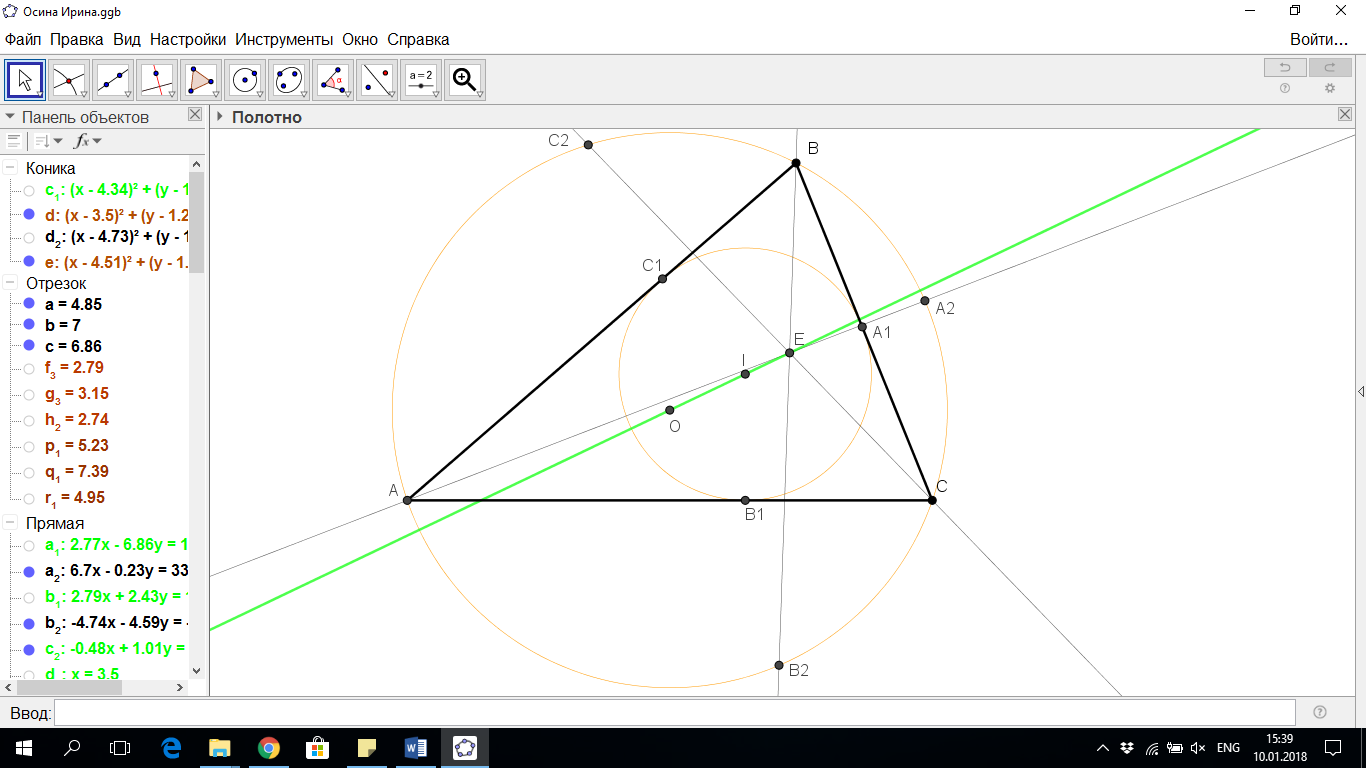


Рис. 1. Иллюстрация к задаче.

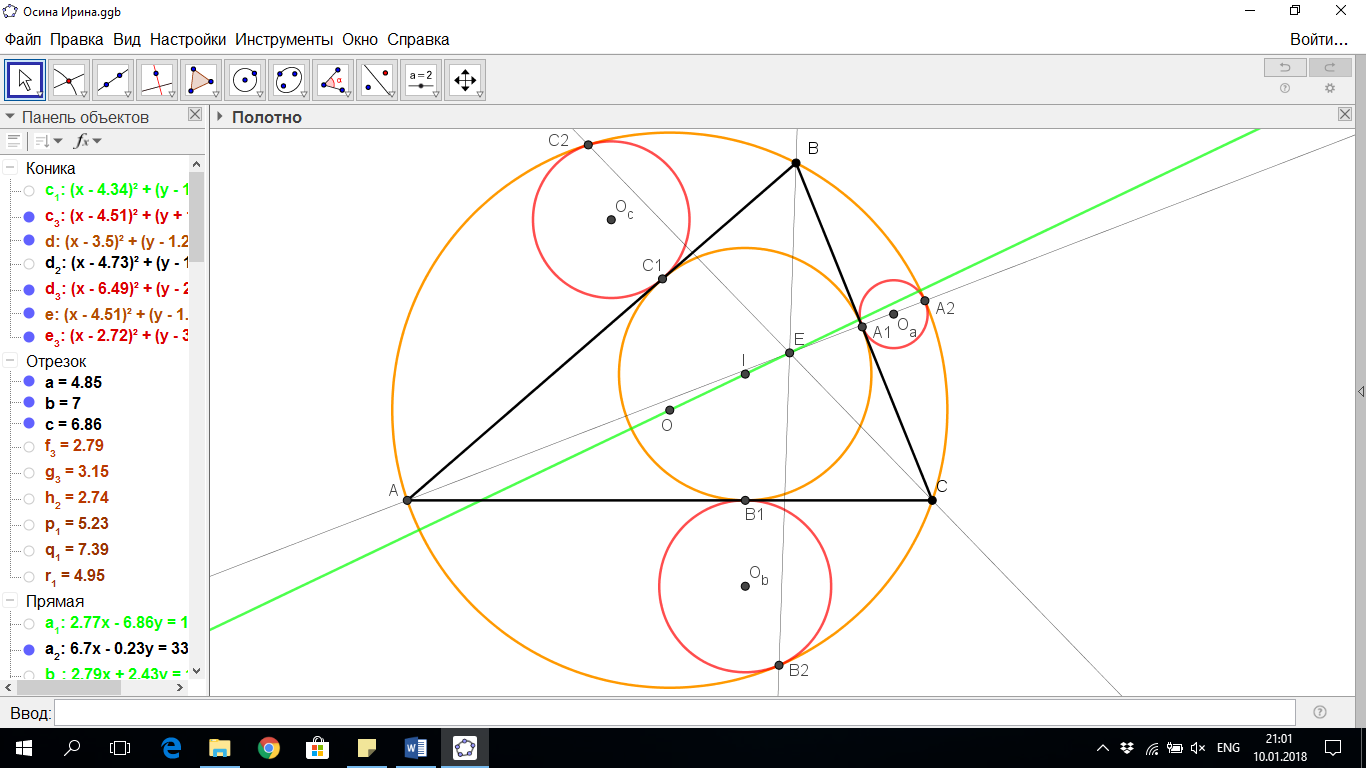


Рис. 2. Взаимное расположение пяти окружностей.

**Теорема.**Прямые ,, пересекаются в одной точке, которая лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.

**Доказательство.**

а) Утверждение о том, что прямые ,, пересекаются в одной точке*E*, следует из свойствизоциркулярного преобразования, предложенного в [2].

Суть изоциркулярного преобразования состоит в следующем. Рассмотрим произвольную точку *Z*, расположенную внутри Δ*ABC*. Прямые *AZ*, *BZ*, *CZ*пересекают описанную около данного треугольникаокружность в точках,, . В сегмент, отсекаемый стороной *BC,* дуга которого не содержит т. *A*, впишем окружность, которая касается стороны*BC* в точке . Аналогично определим точки и (рис. 3). Прямые ,, пересекаются в одной точке , которую мы будем называть изоциркулярным образом точки [2]. И наоборот, по известной точке можно определить единственную точку.

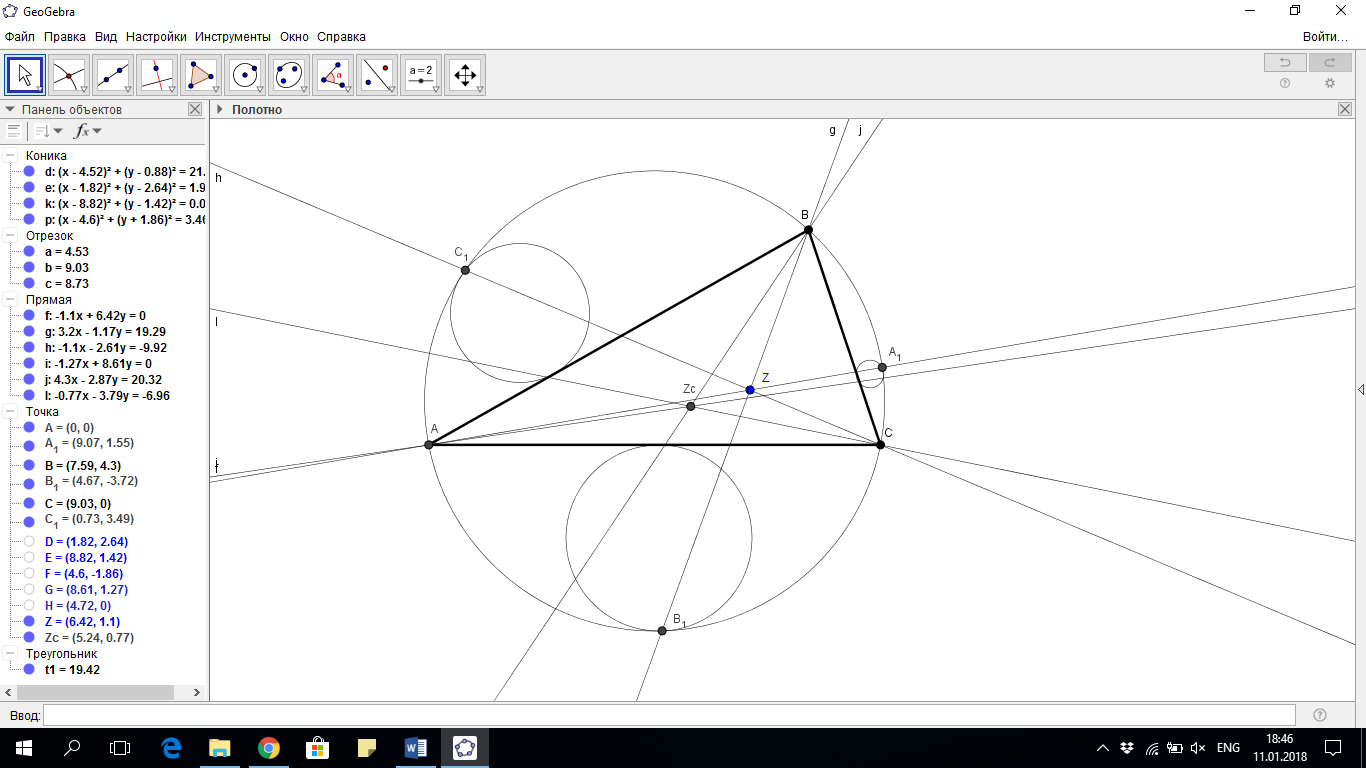


Рис. 3. Изоциркулярное преобразование.

Точка является, таким образом, прообразом точки Жергона [1, 3]. Тут же укажем, что барицентрические координаты т. *E*, так как барицентрические координаты при изоциркулярном преобразовании связаны простым соотношением, а координаты т. *Gr*.

б) Для доказательства того, что данная точка *E*принадлежит прямой *OI*, воспользуемся уравнением этой прямой в барицентрических координатах.

Такое уравнение имеет вид: , где и – координаты двух точек данной прямой [2,3]. Еслиточка принадлежит прямой, то при подстановке ее координат в уравнение получим верное равенство. Координаты точек *O* и *I* известны: *I*, *O*.Подставим в уравнение координаты точки *E*:

После преобразований получаем, что они удовлетворяют данному уравнению.

Ч.т.д.

Одним из основных является вопрос о расположении точки *E* на прямой *OI* относительно центров вписанной и описанной окружностей. Как показывают построения, точки *O* и *E* всегда расположены по разные стороны от точки *I*, но обоснование этого наблюдения еще не получено. При этом точка *E* всегда лежит внутри треугольника, также, как и центр вписанной окружности. Действительно, для получения т. *E* необходимо провести прямые, обязательно пересекающие стороны треугольника.

Вопрос о расстоянии *IE*является одним из главных, и довольно сложен, его предполагается подробно изучить в дальнейшем, а в настоящей работе мною рассмотрен только частный случай – равнобедренный треугольник. В силу свойств подобия достаточно рассмотреть равнобедренные треугольники с одинаковым основанием = 1. Тогда единственным параметром, от которого будут зависеть исследуемые величины, будет угол при вершине *B*.

Рис. 4. Зависимости и.

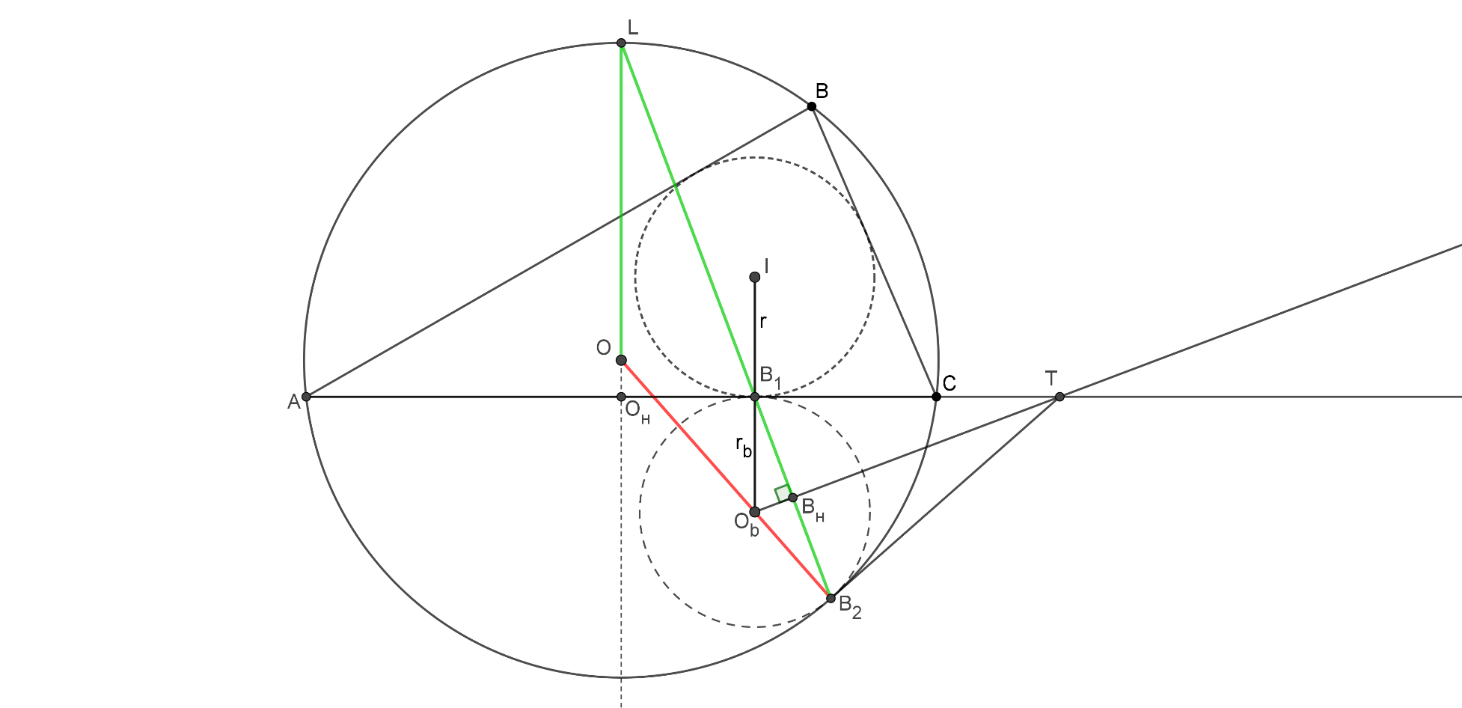
Для равнобедренного треугольника с основанием и углом при верщине радиусы описанной и вписанной окружностей определяются по известным формулам: , , а расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей вычисляется по формуле Эйлера, .

Длина отрезка *IE*, так как формула для ее нахождения мною еще не выведена, определялась с использованием программного продукта GeoGebra. И данные значения являются приближенными, но, дают возможность представить общую картину.

На рисунке 4 показаны зависимости от угла радиусов описанной и вписанной окружностей, расстояния между ними и длины отрезка *IE*. Можно видеть, что для всех значений , причем равенство достигается в правильном треугольнике.

Исследования продолжаются

**Определение радиусов окружностей, вписанных в сегменты**

Мне удалось составить уравнение для определения радиусов окружностей, вписанных в сегменты. Для определенности рассмотрим радиус Идея состоит в следующем: (по двум углам, рис. 5). Из подобия данных треугольников следует соотношение: . можно найти из прямоугольного треугольника :. Выразим , где и . , где . найдем из прямоугольного треугольника ., причем . Выполнив преобразования, получим, что , где Подставив эти выражения в пропорцию, выведенную из подобия двух треугольников, и проделав многочисленные преобразования, я получила следующее квадратное уравнение:

.

Рис. 5. К определению радиуса

В дальнейшем необходимо рассмотреть несколько вопросов, связанных с данной задачей:

1. Доказать, что прямые ,, проходят через основания высот треугольника касаний.

# **Заключение**

В ходе выполнения мною работы были достигнуты следующие результаты:

1. Найдена новая точка треугольника – описан метод ее построения.
2. Сформулирована и доказана теорема о существовании данной точки и ее основном свойстве.
3. Сформулированы задачи для дальнейшего исследования.

# **Список использованных источников и литературы**

1. *Коксетер Г., Грейтцер С.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.
2. *Мякишев А.Г.* Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002. – 312 с.
3. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. — М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.