XXI Российская научная конференция школьников «Открытие»

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКА

**Вписанная, описанная и вневписанная окружности и, геометрические неравенства, получаемые из них**

***Исследовательская работа***

**Авторы – Михайлова Анастасия Александровна,** обучающаяся 11 класса

средней школы №3

п. Балезино Удмуртской республики

**Наговицына Алла Сергеевна,**

обучающаяся 11 класса

средней школы №3

п. Балезино Удмуртской республики

**Научный руководитель – Касимов Рифхат Шамилович**, руководитель районного физико-математического кружка, педагог дополнительного образования Балезинской СОШ №2

Ярославль, 2018

Оглавление

[Вступление. 3](#_Toc496984080)

[Основная часть. 4](#_Toc496984081)

[2.1 Получение неравенств, в том числе и числовых, используя равносторонний, равнобедренный прямоугольный, прямоугольный разносторонний и остроугольный равнобедренный треугольники 4](#_Toc496984082)

[2.2Вневписанная окружность, ее определение, свойства и основные формулы, связывающие основные геометрические величины с радиусами пяти окружностей (описанная R, вписанная r и 3 вневписанные окружности ra, rb, rc). 7](#_Toc496984083)

[2.3Решение олимпиадных задач, используя результаты нашего исследования. 11](#_Toc496984084)

[Заключение 14](#_Toc496984085)

[Список литературы 15](#_Toc496984086)

[Приложения 16](#_Toc496984087)

# Вступление.

Занимаясь в районном физико-математическом кружке мы, как и остальные кружковцы решили нынче заниматься проектно-исследовательской деятельностью по математике.

С учетом того что геометрические неравенства доказываются непросто, а там более они составляются и получаются очень сложно, руководителем нашего исследования была поставлена задача, чтобы мы попробовали получить эти неравенства, используя понятия радиусов вписанной и описанной окружности (R и r).

Мы убедились, что для всех общеизвестных треугольников, за исключением разностороннего треугольника, эта задача выполнима, но, к сожалению, для разностороннего треугольника для реализации поставленных целей и задач пришлось изучить дополнительно и самостоятельно такое понятие как вневписанная окружность и важные свойства этих окружностей, записывая их в виде теорем и формул.

# Основная часть.

Как было отмечено во вступительной части нашего исследования, мы проводим свое исследование по основным типам треугольников:

* Равносторонний треугольник;
* Равнобедренный прямоугольный треугольник;
* Прямоугольный треугольник;
* Равнобедренный произвольный треугольник;
* Разносторонний треугольник.

## 2.1 Получение неравенств, в том числе и числовых, используя равносторонний, равнобедренный прямоугольный, прямоугольный разносторонний и остроугольный равнобедренный треугольники

1. ∆АВС – равносторонний

АВ=ВС=АС=*a*; *R*=? r =? *a=b=c*

;

;

Значит, через радиус описанной окружности можно выразить P и S:

В

С

А

;

Значит, через радиус вписанной окружности можно выразить Р и S:

;

|  |  |
| --- | --- |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |

(доказательство неравенств смотреть в приложениях 1-12)

2) ∆ABC – равнобедренный прямоугольный

*;* Тогда:

Значит, периметр и площадь треугольника АВС также можно выразить через R и r:

А

В

С

; ;

;;

|  |  |
| --- | --- |
| ; | *;* |
| *;* | ; |
| ; | *;* |
| ; | *;* |
| ; | *;* |
| ; | *;* |

(доказательство неравенств смотреть в приложениях 13-24)

3) ∆АВС – прямоугольный

; ; ; ;

; ;

А

С

В

;

|  |  |
| --- | --- |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |

(доказательство неравенств смотреть в приложениях 25-36)

4) ∆ABC – равнобедренный

;

;

В

H

A

C

;

Для упрощения выражений проведем дальнейшие преобразования.

; =;

; ; ;

|  |  |
| --- | --- |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | *;* |

(доказательство неравенств смотреть в приложениях 37-42)

2.2Вневписанная окружность, ее определение, свойства и основные формулы, связывающие основные геометрические величины с радиусами пяти окружностей (описанная R, вписанная r и 3 вневписанные окружности ra, rb, rc).

Как было указано выше для получения более сложных вместе с тем более интересных геометрических неравенств наряду с вписанной и описанной окружностями. Мы дадим определение и укажем основные понятия вневписанных окружностей, также укажем важные свойства и выведем формулы, отражающие эти свойства.

Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, к которой являются касательными одна из сторон треугольника и продолжения двух других его сторон.

Обозначения для треугольника АВС:

ВС = а, АВ= b, АВ=с – длины сторон треугольника; р и S – его полупериметр и площадь; ra, rb, rc – радиусы его вневписанных окружностей, касающихся сторон ВС, АС, АВ;r и R – радиусы его вписанной и описанной окружностей соответственно.

Теорема1 Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны ВС треугольника АВС, вычисляется по формуле

Доказательство: выполняется следующее равенство (рис.1, приложение 43)

Аналогично получаются формулы

Следствие 1 Большей стороне треугольника соответствует касающаяся ее, вневписанная окружность большего радиуса и наоборот.

Следствие 2 Радиус вневписанной окружности треугольника больше радиуса окружности, вписанной в тот же треугольник.

Следствие 3 Площадь треугольника АВС может быть вычислена по формулам:

Следствие 4 Для отношения радиусов вписанной и вневписанных окружностей имеют место равенства ;

Следствие 5 Используя формулу Герона, получим формулы для вычисления длин радиусов через стороны треугольника

;

Из формулы Герона имеем . Значит,

Центр вневписанной окружности находится на пересечении биссектрис ВВ1 и СС1, соответствующих внешних углов треугольника АВС. Соединим точки А и О и рассмотрим площадь треугольника: *SABO= SACO= SBCO=* Но *SABC = S = SABO + SACO - SBCO*, т.е*.* ⇒ (где р – полупериметр). Аналогично определяются и два других радиуса.

Итак,  (1)

Из формул (1) ясно, что *ra = rb= rc* <=> *a = b = c* и *ra < rb< rc* <=> *a < b < c*

По формулам (1) имеем: *; (2)*

Из формул (2) находим соотношения сторон треугольника:  *⇒ (3)*

Из формул (1) выразим сумму попарных произведений радиусов вневписанных окружностей:

Значит, полупериметр треугольника равен (4)

Из формул (3) и (4) получаем

(5)

Формулы (5) свидетельствуют о том, что треугольник однозначно определяется значением трех радиусов вневписанных окружностей и что любые три положительных числа могут быть длинами этих радиусов. Действительно из формул (5) очевидны неравенства

*.*

Из формул (2) и (5) следует

Тогда радиус описанной окружности

Радиус вписанной окружности  *⇒*

Но ; ;

Значит , т.е. *R ≥ 2r.* Равенство имеет местно тогда и только тогда, когда , т.е. в случае равностороннего треугольника при *a = b = c.*

*;*

Несколько сложнее выразить сумму этих радиусов. Удобно вычислить величину . Имеем:

Итак, выше полученные элементарные симметрические многочлены от трех переменных – радиусов вневписанных окружностей треугольника АВС: ; (6)

Рассмотрим цепочку классических неравенств:

;

Верных при *x >0, y >0, z >0* (они обращаются в равенства тогда и только тогда, когда *x=y=z*). Фактически здесь шесть неравенств, отраженных в таблице. Сделаем замену переменных на *x=ra*, *y=rb,z=rc* и воспользуемся формулами (6).

|  |  |
| --- | --- |
| Неравенство | Замена переменных  *x=ra*, *y=rb,z=rc* |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |
| ; | ; |

(доказательство неравенств смотреть в приложениях 43-48)

Таким образом, используя такой раздел математики как геометрия, нам

удалось получить ряд геометрических неравенств как простых очевидных, так и сложных нестандартных, которые в свою очередь используются в процессе доказательства непростых олимпиадных геометрических неравенств.

## 2.3Решение олимпиадных задач, используя результаты нашего исследования.

Продемонстрируем практическую значимость и результативность нашего исследования, решив 8 олимпиадных задач. Успешность решения, которых полностью обеспечивается идеями, методами и основными формулами которые использовались в предыдущем разделе нашей исследовательской работы.

1. Докажем неравенство , где p-периметр произвольного треугольника АВС, S-его площадь, π-постоянное число представляющее собой отношение длины окружности ее диаметру π3,14. Данное неравенство не встречается в школьном курсе математике, хотя на вид (по своей структуре оно простое и связывает известные элементы произвольного треугольника). Более того в процессе выполнения своего исследования мы убедились, что это неравенство доказывается непросто, даже для отдельных частных видов треугольника не говоря о доказательстве в общем виде. Из литературы мы выяснили, что это неравенство носит название изопериметрического неравенства. Для доказательства этого неравенства, мы используем доказанные нами и занесенные в таблицу неравенства. Которые связывают квадрат периметра треугольника связанные площадью (S): , а доказуемое нами изопериметрическое неравенство имеет вид: . Очевидно для его доказательства достаточно сравнить 12 и 4, .
2. Докажем, что для любого треугольника АВС выполняется следующее неравенство: , где *a,b,c* – стороны треугольника АВС, *S* – его площадь.

, где *P* – периметр треугольника АВС;

Из свойств числовых неравенств следует, что

1. «Известно, в равностороннем треугольнике , где *R* – радиус описанной окружности, *r* – радиус вписанной окружности. Выясним, как же связаны эти геометрические элементы для произвольных треугольников»

Решение: Предположим, что , для дальнейшего решения нашей задачи либо доказать, либо опровергнуть. Для этого запишем классическое неравенство связывающее среднее арифметическое трех положительных чисел *x, y, z* с его средним гармоническим. Т.е. . Заменим в обеих частях неравенства *x, y, z* на соответственно, тогда получим ;

;

Таким образом, действительно причем равенство выполняется только для равностороннего треугольника, а для других треугольников выполняется строгое неравенство. Значит наше предположение о том, что справедливо и оно доказано в общем виде.

1. Докажем следующие равенства:
2. ⇒ pS=
3. ;
4. ()()() ;

4

()()()

1. ;

# Заключение

Таким образом, нам удалось реализовать все цели и задачи определенные планом и программой выполнения исследовательской работы:

1. Мы доказали, а в некоторых случаях и получили числовые неравенства, когда выражали стороны треугольника, его площадь и периметр, через радиус описанной окружности *R* и через радиус вписанной окружности *r*.
2. Изучили дополнительную литературу, где мы познакомились с таким понятием как вневписанная окружность, радиусом этой окружности и с рядом важных геометрических формул.
3. Через эти формулы получили новые геометрические неравенства.
4. Мы использовали эти новые геометрические неравенства для доказательства трех геометрических неравенств, являющимися олимпиадными заданиями.
5. Нашли и решили 5 олимпиадных задач на доказательство геометрических равенств, опираясь на теоретическую и практическую часть нашей исследовательской работы.

# Список литературы

1.Прокофьев А.А.; Корянов А.Г. Научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе №8 2014 год». Свойства вневписанных окружностей треугольника (часть 1) стр.20

2. Прокофьев А.А.; Корянов А.Г. Научно-теоретический и методический журнал «Математика в школе №9 2014 год». Свойства вневписанных окружностей треугольника (часть 2) стр.14

3.Дроздов В. Научно-популярный физико-математический журнал « Квант» сентябрь/декабрь 2014 год №5-6 школа в кванте. Пять окружностей стр.50

4. «Геометрия». Полный справочник.- М.: Махаон, 2006. – 320с. ( Для школьников и абитуриентов). Гусев В.А., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. §1.5 Треугольники. Вписанная и описанная окружности стр.32

# Приложения

;

* 1. ;
  2. ;
  3. ;
  4. ;

1. ;
2. ;
3. +
   1. ;
   2. ;

;

;

;

;

;

.

; ;

; ;

* 1. ;

; ;

;

* 1. ;

;

;

;

;

* 1. ;

; ;

* 1. ;

; ;

* 1. ;

;

* 1. ;

;

; ;

;

;

;

;

* 1. ;

;

;

; ;

;

;;

;

;

;

;

;

;

* 1. ;
  2. что равносильно

Откуда следует, что . Естественно равенство имеет место в том и только в том случае, когда треугольник равносторонний.

;

* 1. 