XIII Российская научная конференция школьников "Открытие"

секция математики

Неравенства Ки Фана и параллельные переносы вдоль вещественной прямой

Исследовательская работа

Выполнили:
Сандлер Андрей Дмитриевич,
ученик 11 класса МОУ СОШ №33,

Благов Даниил Сергеевич,
ученик 11 класса МОУ СОШ №33.

Научный руководитель:
Ястребов Александр Васильевич,
доктор педагогических наук,
профессор

Ярославль, 2010г.

1. Введение

В книге [1, гл. 4] рассматривается конструкция, приводящая к неравенствам специального вида, которые называются неравенствами Ки Фана. Кратко воспроизведём эту конструкцию.

Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ принадлежат полуинтервалу $(0, \frac{1}{2}]$. Построим числа $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$ по формулам

$$a'_i = 1 - a_i, \tag{1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Для каждой из групп чисел можно записать их арифметические и геометрические средние $A_n,\ G_n,\ A'_n,\ G'_n$. В этой же книге доказано, что имеют место неравенства, связывающие эти величины:

$$A'_n - A_n \leqslant G'_n - G_n. \tag{2}$$

$$\frac{G_n}{G'_n} \leqslant \frac{A_n}{A'_n}, \tag{3}$$

Они называются неравенствами Ки Фана, аддитивным и мультипликативным соответственно.

Перепишем равенство (1) в более удобном виде: $\dfrac{a_i + a'_i}{2} = \dfrac{1}{2}$. Оно означает, что точки числовой оси с координатами a_i и a'_i симметричны относительно точки $\dfrac{1}{2}$, другими словами, числа a'_i получены из чисел a_i с помощью симметрии.

В настоящем докладе рассматривается другое преобразование, а именно параллельный перенос, который применяется к группе произвольных положительных чисел. Мы покажем, что в этом случае справедливы неравенства, аналогичные неравенствам (2) и (3).

2. Условные обозначения

Среднее арифметическое $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ есть функция от многих аргументов, причем их порядок не играет роли. Поэтому можно считать, что аргументы записаны в неубывающем порядке: $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Для того, чтобы не рассматривать тривиальные случаи, мы не будем брать конфигурацию $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. При параллельном переносе расстояние между соседними точками не меняется. В силу этого упорядоченный набор $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ характеризуется своим наименьшим числом $x = a_1$ и расстояниями $d_i = a_i - x$. Теперь можно обозначить $U = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ как $U = (x \mid d_2, \ldots, d_n)$ или, для краткости, $U = (x \mid d_i)$. Средние арифметико-геометрические тогда запишем как $A(x \mid d_i)$ и $G(x \mid d_i)$. Очевидно, что такие обозначения позволяют нам рассматривать $A(x \mid d_i)$ и $G(x \mid d_i)$ как функции одного аргумента.

3. Предельные соотношения

Перед тем, как мы получим неравенства, связывающие $A(x \mid d_i)$ и $G(x \mid d_i)$, изучим эти функции на бесконечности. Прежде всего отметим, что средние арифметико-геометрические непрерывны при $x > 0$. Для $A(x \mid d_i)$ это очевидно, так как

$$A(x \mid d_i) = \frac{x + (x + d_2) + \ldots + (x + d_n)}{n} = x + \frac{d_2 + \ldots + d_n}{n}$$

является линейной функцией. $G(x \mid d_i)$ также непрерывна вследствие непрерывности степенной функции и многочлена:

$$G(x \mid d_i) = \sqrt[n]{x \cdot (x + d_2) \cdot \ldots \cdot (x + d_n)} = (f \circ g)(x),$$

где $f(x) = \sqrt[n]{x}$, а $g(x) = x \cdot (x + d_2) \cdot \ldots \cdot (x + d_n)$. Так как неравенства (2) и (3) связывают частное и разность средних арифметико-геометрических, то и мы постараемся вывести некоторые соотношения для частного и разности $A(x \mid d_i)$ и $G(x \mid d_i)$ при $x \to +\infty$.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{A(x\mid d_i)}{G(x\mid d_i)}=1. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим здесь и далее $S=\dfrac{d_2+d_3+\ldots+d_n}{n}$. Прямыми вычислениями получаем, что

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{A(x\mid d_i)}{G(x\mid d_i)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+(x+d_2)+\ldots+(x+d_n))/n}{\sqrt[n]{x\cdot(x+d_2)\cdot\ldots\cdot(x+d_n)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+S}{\sqrt[n]{x\cdot(x+d_2)\cdot\ldots\cdot(x+d_n)}}.$$

Так как $x>0$, то мы можем разделить числитель и знаменатель на x и внести $\dfrac{1}{x}$ под корень. Получим, что

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+S/x}{\sqrt[n]{\frac{x}{x}\cdot\frac{x+d_2}{x}\cdot\ldots\cdot\frac{x+d_n}{x}}}.$$

Числитель дроби и каждый множитель в знаменателе стремятся к 1 при $x\to+\infty$, поэтому вся дробь стремится к 1 т.е. $L=1$, что и требовалось доказать.▼

Чтобы получить предельное соотношение для разности $A(x\mid d_i)$ и $G(x\mid d_i)$, нам нужно доказать две леммы.

Лемма 1. *Степень многочлена $A^n(x\mid d_i)-G^n(x\mid d_i)$ не превосходит $n-2$.*

Доказательство. Запишем, чему равны n-е степени арифметико-геометрических средних:

$$A^n(x\mid d_i)=(x+S)^n=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k\cdot x^{n-k}\cdot S^k)=x^n+n\cdot x^{n-1}\cdot S+\alpha(x),$$

$$G^n(x\mid d_i)=x\cdot(x+d_2)\cdot\ldots\cdot(x+d_n)=x^n+x^{n-1}\cdot S\cdot n+\beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - многочлены степени, не большей $n-2$. Тогда $A^n(x\mid d_i)-G^n(x\mid d_i)=\alpha(x)-\beta(x)=\gamma(x)$, причём степень многочлена $\gamma(x)$ также не больше $n-2$, что и требовалось доказать.▼

Лемма 2. *Для всех целых $j\in[0,n-1]$ верно следующее неравенство:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{A^j(x\mid d_i)\cdot G^{n-j-1}(x\mid d_i)}{x^{n-1}}\geqslant 1. \tag{5}$$

Доказательство. Из неравенства Коши известно, что $A(x\mid d_i)\geqslant G(x\mid d_i)\geqslant x$. Тогда

$$A^j(x\mid d_i)\cdot G^{n-j-1}(x\mid d_i)\geqslant x^j\cdot x^{n-j-1}=x^{n-1},$$

и поэтому неравенство (5) имеет место.▼

Теперь сформулируем и докажем теорему о пределе разности арифметико-геометрических средних.

Теорема 2. *Справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{x\to+\infty}(A(x\mid d_i)-G(x\mid d_i))=0. \tag{6}$$

Доказательство. По формуле разности n-ных степеней имеем

$$a^n-b^n=(a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+\ldots+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1}).$$

Положим $a = A(x \mid d_i)$, $\ b = G(x \mid d_i)$. Тогда

$$A(x \mid d_i) - G(x \mid d_i) = \frac{A^n(x \mid d_i) - G^n(x \mid d_i)}{A^{n-1}(x \mid d_i) + A^{n-2}(x \mid d_i) \cdot G(x \mid d_i) + \ldots + G^{n-1}(x \mid d_i)}.$$

Разделим числитель и знаменатель на x^{n-1}.

$$A(x \mid d_i) - G(x \mid d_i) = \frac{(A^n(x \mid d_i) - G^n(x \mid d_i))/x^{n-1}}{(A^{n-1}(x \mid d_i) + A^{n-2}(x \mid d_i) \cdot G(x \mid d_i) + \ldots + G^{n-1}(x \mid d_i))/x^{n-1}} \qquad (7)$$

По лемме 1 $A^n(x \mid d_i) - G^n(x \mid d_i) = \gamma(x)$, где $\deg(\gamma) \leqslant n-2$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{A^n(x \mid d_i) - G^n(x \mid d_i)}{x^{n-1}} = 0,$$

а это числитель дроби (7). Но по лемме 2 каждое слагаемое в знаменателе дроби (7)

$$\frac{A^j(x \mid d_i) \cdot G^{n-j-1}(x \mid d_i)}{x^{n-1}}$$

имеет положительный предел, не меньший 1, поэтому при $x \to +\infty$ вся дробь (7) стремится к 0 и равенство (6) справедливо.▼

Мы получили предельные соотношения (4) и (6) для частного и разности $A(x \mid d_i)$ и $G(x \mid d_i)$. В обоих случаях наименьшее число x стремилось к $+\infty$, а остальные числа $x + d_i$ переносились параллельно. Выясним, монотонно ли при этом изменялась функция разности и частного.

4. Изучение средних на бесконечности

Чтобы посмотреть на характер стремления разности и частного $A(x \mid d_i)$ и $G(x \mid d_i)$ к своим пределам, продифференцируем их по x. Для этого нам потребуется ещё одна лемма.

Лемма 3. *Обозначим* $P_n(x) = x \cdot (x + d_2) \cdot \ldots \cdot (x + d_n)$. *Тогда*

$$(P_n(x))' = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_n(x)}{x + d_i}.$$

Доказательство. Проведём доказательство индукцией по n. Для $n = 2$ имеем:

$$(x \cdot (x + d_2))' = (x)' \cdot (x + d_2) + x \cdot (x + d_2)' = (x + d_2) + x = \frac{P_2(x)}{x} + \frac{P_2(x)}{x + d_2}.$$

Пусть теперь исходное утверждение доказано для всех $t < n$. Докажем его и для $t = n$. Домножим многочлен $P_{n-1}(x)$ на $x + d_n$ и продифференцируем полученное выражение.

$$(P_n(x))' = (P_{n-1}(x) \cdot (x + d_n))' = (P_{n-1}(x))' \cdot (x + d_n) + (P_{n-1}(x)) \cdot (x + d_n)'.$$

По предположению индукции $(P_{n-1}(x))' \cdot (x + d_n) = (\frac{P_{n-1}(x)}{x} + \frac{P_{n-1}(x)}{x + d_2} + \ldots + \frac{P_{n-1}(x)}{x + d_{n-1}}) \cdot (x + d_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P_n(x)}{x + d_i}$. Но с другой стороны $(P_{n-1}(x)) \cdot (x + d_n)' = P_{n-1}(x) \cdot 1 = \frac{P_{n-1}(x) \cdot (x + d_n)}{x + d_n} = \frac{P_n(x)}{x + d_n}$, поэтому

$$(P_{n-1}(x))' \cdot (x + d_n) + (P_{n-1}(x)) \cdot (x + d_n)' = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{P_n(x)}{x + d_i} + \frac{P_n(x)}{x + d_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_n(x)}{x + d_i},$$

что и требовалось доказать.▼

Перейдём теперь к дифференцированию разности и частного $A(x \mid d_i)$ и $G(x \mid d_i)$. Введём фунцкцию $f_1(x) = A(x \mid d_i) - G(x \mid d_i)$. С учётом того, что $A(x \mid d_i) = x + S$ является линейной функцией, $f_1'(x)$ примет вид

$$f_1'(x) = A'(x \mid d_i) - G'(x \mid d_i) = 1 - (P_n(x)^{\frac{1}{n}})' = 1 - \frac{1}{n} \cdot P_n(x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (P_n(x))' = 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{P_n(x)}}{P_n(x)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{P_n(x)}{x+d_i} =$$

$$= 1 - G(x \mid d_i) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x+d_i}.$$

Заметим, что $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x+d_i} = \dfrac{1}{H(x \mid d_i)}$, где $H(x \mid d_i)$ - среднее гармоническое чисел последовательности $U(x \mid d_i)$:

$$H(x \mid d_i) = \frac{n}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+d_2} + \ldots + \frac{1}{x+d_n}}.$$

А из неравенства Коши известно, что $G(x \mid d_i) \geqslant H(x \mid d_i)$, и случай равенства достигается при совпадении всех аргументов, что нас не интересует. Тогда $f_1'(x) = 1 - \dfrac{G(x \mid d_i)}{H(x \mid d_i)} < 0$, и мы доказали, что функция $f_1(x) = A(x \mid d_i) - G(x \mid d_i)$ монотонно убывает на всей свой области определения.

Введём теперь функцию $f_2(x) = \dfrac{A(x \mid d_i)}{G(x \mid d_i)}$. Её производная принимает вид

$$f_2'(x) = \frac{A'(x \mid d_i) \cdot G(x \mid d_i) - A(x \mid d_i) \cdot G'(x \mid d_i)}{G^2(x \mid d_i)} = \frac{G(x \mid d_i) - A(x \mid d_i) \cdot \frac{G(x|d_i)}{H(x|d_i)}}{G^2(x \mid d_i)} = \frac{1 - \frac{A(x|d_i)}{H(x|d_i)}}{G(x \mid d_i)}.$$

Из неравенства Коши следует, что $A(x \mid d_i) \geqslant H(x \mid d_i)$, и случай равенства достигается при равенстве всех аргументов, что нас опять же не интересует. Поэтому $\dfrac{A(x \mid d_i)}{H(x \mid d_i)} \geqslant 1$ и $f_2(x)' < 0$. Значит, $f_2(x)$ монотонно убывает на своей области определения.

Из приведённых выше рассуждений вытекает

Теорема 3. *Функции $A(x \mid d_i) - G(x \mid d_i)$ и $\dfrac{A(x \mid d_i)}{G(x \mid d_i)}$ монотонно убывают на своей области определения.*

5. Параллельный перенос

В начале доклада было сказано о получении неравенств, аналогичных (2) и (3), с помощью параллельного переноса вдоль вещественной прямой. Так как при параллельном переносе расстояния d_i не меняются, то новая конфигурация U', полученная из конфигурации U сдвигом вправо на h, будет задаваться теми же d_i и наименьшим числом $x+h$ и будет записываться, как $U'(x+h \mid d_i)$. Тогда для конфигураций U и U' будут выполняться неравенства, аналогичные (2) и (3), которые мы сейчас выведем.

Теорема 4. *Для любого $h > 0$ имеют место следующие соотношения:*

$$A(x+h \mid d_i) - A(x \mid d_i) \leqslant G(x+h \mid d_i) - G(x \mid d_i) \tag{8}$$

$$\frac{G(x \mid d_i)}{G(x+h \mid d_i)} \leqslant \frac{A(x \mid d_i)}{A(x+h \mid d_i)} \tag{9}$$

Доказательство. По теореме 3 функции $A(x \mid d_i) - G(x \mid d_i)$ и $\dfrac{A(x \mid d_i)}{G(x \mid d_i)}$ монотонно убывают на своей области определения. Следовательно,

$$A(x \mid d_i) - G(x \mid d_i) \geqslant A(x+h \mid d_i) - G(x+h \mid d_i),$$
$$\frac{A(x \mid d_i)}{G(x \mid d_i)} \geqslant \frac{A(x+h \mid d_i)}{G(x+h \mid d_i)}$$

для любого $h > 0$. Значит,

$$A(x+h \mid d_i) - A(x \mid d_i) \leqslant G(x+h \mid d_i) - G(x \mid d_i),$$
$$\frac{G(x \mid d_i)}{G(x+h \mid d_i)} \leqslant \frac{A(x \mid d_i)}{A(x+h \mid d_i)},$$

что и требовалось доказать. ▼

6. Применение полученных неравенств

С помощью только что выведенных нами соотношений для $A(x \mid d_i)$ и $G(x \mid d_i)$ можно изящно решать нетривиальные и искусственно усложнённые неравенства, например,
для любых положительных a, b, и натурального n доказать, что

$$\sqrt[n]{(x+b)\cdot(x+b+a)\cdot\ldots\cdot(x+b+(n-1)\cdot a)} - \sqrt[n]{x\cdot(x+a)\cdot\ldots\cdot(x+(n-1)\cdot a)} \geqslant b \qquad (10)$$

Решение данного неравенства счётом и раскрытием скобок совершенно неочевидно, однако, если заметить, что разность средних арифметических от множителей под корнями равна b, то, применяя неравенство (8), можно доказать утверждение (10) в один ход. Если к тому же сделать $b = 1$, то можно получить ещё более красивую задачу:

Пусть S - произведение первых n членов арифметической прогрессии с первым членом x и положительной разностью, S_1 - произведение первых n членов арифметической прогрессии с такой же разностью, но с первым членом, равным $x+1$. Докажите, что $\sqrt[n]{S_1} - \sqrt[n]{S} \geqslant 1$.

Эта задача ничуть не сложнее предыдущей, так как является по сути её переформулировкой для $b = 1$. Единственная сложность возникает, когда нужно понять, с чем связана единица в оценке разности. Эти два примера показывают, что полученные нами неравенства можно применить в задачах или их составлении.

7. Заключение

В своей работе мы рассмотрели предельные соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим и доказали, что при параллельном переносе вдоль числовой прямой разность между этими величинами становится бесконечно малой, а конфигурация $U(x \mid d_i)$ становится похожа на тривиальную конфигурацию, для которой $A(x \mid d_i) - G(x \mid d_i) = 0$ и $\dfrac{A(x \mid d_i)}{G(x \mid d_i)} = 1$. Это происходит потому, что функция $A(x \mid d_i)$ является асимптотической к функции $G(x \mid d_i)$, которая не является линейной, а только стремится к $A(x \mid d_i)$. В этом проявляются нелинейные свойства среднего геометрического. При дифференцировании функции $G(x \mid d_i)$ выявился красивый вид её производной $G'(x \mid d_i) = \dfrac{G(x \mid d_i)}{H(x \mid d_i)}$. Также мы показали, что средние арифметико-геометрические связаны между собой неравенствами, аналогичными неравенствам Ки Фана и показали способы их применения.

8. Литература

1. Калинин, С.И. Средние величины степенного типа [Текст].—Киров: изд-во ВГГУ, 2005.— 327с.